

**MINISTÉRIO DA DEFESA
EXÉRCITO BRASILEIRO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE DEFESA**

PAULO CÉSAR RIBEIRO MARCIANO

**ESTIMAÇÃO DE TRAJETÓRIA BALÍSTICA EM RADARES DE
CONTRABATERIA BASEADA EM FILTRO DE KALMAN E MÁXIMA
VEROSSIMILHANÇA**

**RIO DE JANEIRO
2024**

PAULO CÉSAR RIBEIRO MARCIANO

ESTIMAÇÃO DE TRAJETÓRIA BALÍSTICA EM RADARES DE
CONTRABATERIA BASEADA EM FILTRO DE KALMAN E MÁXIMA
VEROSSIMILHANÇA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Defesa do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências em Engenharia de Defesa.

Orientadores: José Antonio Apolinário Junior, D.Sc.
João Abdalla Ney da Silva, D.Sc.

Rio de Janeiro

2024

©2024

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

Praça General Tibúrcio, 80 – Praia Vermelha

Rio de Janeiro – RJ CEP: 22290-270

Este exemplar é de propriedade do Instituto Militar de Engenharia, que poderá incluí-lo em base de dados, armazenar em computador, microfilmар ou adotar qualquer forma de arquivamento.

É permitida a menção, reprodução parcial ou integral e a transmissão entre bibliotecas deste trabalho, sem modificação de seu texto, em qualquer meio que esteja ou venha a ser fixado, para pesquisa acadêmica, comentários e citações, desde que sem finalidade comercial e que seja feita a referência bibliográfica completa.

Os conceitos expressos neste trabalho são de responsabilidade do autor e dos orientadores.

Marciano, Paulo César Ribeiro.

ESTIMAÇÃO DE TRAJETÓRIA BALÍSTICA EM RADARES DE CONTRA-BATERIA BASEADA EM FILTRO DE KALMAN E MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA / Paulo César Ribeiro Marciano. – Rio de Janeiro, 2024.

132 f.

Orientadores: José Antonio Apolinário Junior e João Abdalla Ney da Silva.

Dissertação (mestrado) – Instituto Militar de Engenharia, Engenharia de Defesa, 2024.

1. Trajetórias Balísticas; Filtro de Kalman Estendido; Estimador de Máxima Verossimilhança; Radar Contrabateria; Extrapolação; Ponto de Impacto; Ponto de Lançamento. i. Antonio Apolinário Junior, José (orient.) ii. Abdalla Ney da Silva, João (orient.) iii. Título

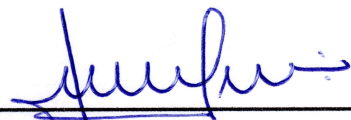
PAULO CÉSAR RIBEIRO MARCIANO

**ESTIMAÇÃO DE TRAJETÓRIA BALÍSTICA EM
RADARES DE CONTRABATERIA BASEADA EM
FILTRO DE KALMAN E MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA**

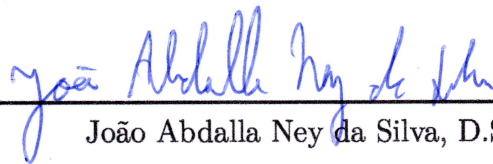
Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Defesa do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências em Engenharia de Defesa.

Orientadores: José Antonio Apolinário Junior e João Abdalla Ney da Silva.

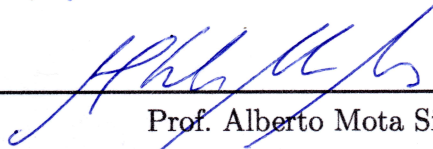
Aprovada em 23 de Fevereiro de 2024, pela seguinte banca examinadora:



Prof. José Antonio Apolinário Junior, D.Sc., do IME - Presidente



João Abdalla Ney da Silva, D.Sc., do CTEx



Prof. Alberto Mota Simões, Dr., do IME



Leandro Guimarães Figueiroa Pralon, Dr., do CTEx

Rio de Janeiro

2024

Este trabalho é dedicado à minha família.

AGRADECIMENTOS

Antes de tudo, dirijo meu mais profundo agradecimento a Deus, fonte de toda sabedoria e amor. Em cada passo desta jornada, senti Sua presença orientadora e consoladora, iluminando meu caminho com fé e esperança. Reconheço que sem Sua bênção e graça, este trabalho não seria possível.

Um agradecimento especial é reservado ao amor da minha vida, Jacqueline, minha amada esposa. Sua força, amor e apoio incondicional foram a base sobre a qual construí este sonho. Em cada desafio, em cada vitória, você esteve ao meu lado, sendo meu porto seguro e minha inspiração.

Aos meus queridos filhos, Nina, Theo e Sofia, vocês são as maiores alegrias da minha vida. Seu sorriso e entusiasmo diários me deram energia e motivação para seguir em frente, mesmo nos momentos mais desafiadores.

Agradeço imensamente aos meus pais, Ana Maria e Vicente, pelo exemplo de vida, amor e confiança inabalável. Vocês me ensinaram o valor da perseverança e da fé, e sempre acreditaram em mim, mesmo quando eu mesmo duvidei. Agradeço à minha irmã, Karina, pelo apoio e encorajamento contínuo.

Expresso minha sincera gratidão ao amigo Maximiliano pelo suporte inestimável desde o início do curso.

Gostaria de expressar minha mais profunda gratidão aos meus estimados orientadores, Prof. Apolinário e Cel. Abdalla, pela orientação indispensável e apoio incondicional durante este trabalho. A sabedoria e orientação dos senhores iluminaram meu caminho.

Expresso minha gratidão ao Centro de Guerra Acústica e Eletrônica da Marinha (CGAEM) pelo apoio e pela oportunidade tão esperada de realizar este sonho.

Ao Centro de Avaliações do Exército (CAEx) pelo apoio e fornecimento dos dados que enriqueceram este trabalho. E também ao Centro Tecnológico do Exército (CTEx) pela fundamental troca de conhecimento e oportunidade de contribuição que me foram dadas.

Meus sinceros agradecimentos à Financiadora de Estudos e Projetos (FINEP) pelo apoio e financiamento a este trabalho.

Este trabalho é o resultado de um esforço coletivo e de muita dedicação. A cada um de vocês, minha eterna gratidão.

*"No meio do caos há sempre uma oportunidade."
(Sun Tzu)*

RESUMO

Esta dissertação aborda o problema da estimação de trajetórias balísticas em radares de contrabateria, com foco específico na aplicação do Filtro de Kalman Estendido e no Estimador de Máxima Verossimilhança. O trabalho inicia-se com a exploração da modelagem balística de projéteis, englobando aspectos fundamentais da balística externa. Por meio desta análise, a pesquisa apresenta uma compreensão aprofundada das dinâmicas envolvidas no movimento dos projéteis e os fatores que influenciam seu comportamento. Um componente central deste estudo é a aplicação do Filtro de Kalman Estendido. Este método, conhecido por sua eficácia na previsão e correção de trajetórias em sistemas dinâmicos, é explorado em detalhe, com ênfase na sua capacidade de acomodar modelos não lineares inerentes à balística de projéteis. Dentro deste contexto, diferentes modelagens para o parâmetro de arrasto são apresentadas e analisadas. O estudo compara estas modelagens, buscando identificar aquela que oferece a melhor estimativa deste parâmetro crucial, impactando diretamente na precisão da previsão de trajetórias. Além disso, a dissertação avança para a discussão sobre o Estimador de Máxima Verossimilhança, aplicado no contexto da estimação de pontos de lançamento e de impacto de projéteis. Este segmento da pesquisa mostra a importância e a robustez do método de Máxima Verossimilhança, demonstrando sua eficácia na obtenção de estimativas de forma precisa. Os resultados obtidos contribuem para o entendimento das características do Filtro de Kalman e do estimador de Máxima Verossimilhança, especialmente em relação à precisão e à aplicabilidade em tempo real. Os resultados sublinham a importância de estimar os parâmetros de maneira eficiente e dinâmica, reforçando a relevância do estudo para aprimorar métodos de previsão de trajetórias em sistemas de radar de contrabateria. Este trabalho também contribui para o campo da balística e sistemas de radar, fornecendo resultados para o desenvolvimento de métodos mais precisos e eficientes de previsão e análise de trajetórias de projéteis.

Palavras-chave: Trajetórias Balísticas; Filtro de Kalman Estendido; Estimador de Máxima Verossimilhança; Radar Contrabateria; Extrapolação; Ponto de Impacto; Ponto de Lançamento.

ABSTRACT

This research addresses the problem of estimating ballistic trajectories in counter-battery radars, specifically focusing on applying the Extended Kalman Filter and the Maximum Likelihood Estimator. The work begins with exploring projectile ballistic modeling, encompassing fundamental aspects of external ballistics. Through this analysis, the research provides an in depth understanding of the dynamics involved in projectile motion and the factors influencing their behavior. A central component of this study is the application and theoretical deepening of the Extended Kalman Filter. This method, known for its effectiveness in predicting and correcting trajectories in dynamic systems, is explored in detail, emphasizing its ability to accommodate the nonlinear models inherent in projectile ballistics. Different modeling approaches for the drag parameter are presented and analyzed within this context. The study compares these models, seeking to identify the one that provides the best estimate of this crucial parameter, directly impacting the accuracy of trajectory prediction. Furthermore, the dissertation discuss the Maximum Likelihood Estimator applied in estimating launch and impact points of projectiles. This segment of the research demonstrates the importance and robustness of the Maximum Likelihood Estimation method, showing its effectiveness in obtaining precise estimates. The results obtained are significant, highlighting the characteristics of the Kalman Filter and Maximum Likelihood, especially regarding accuracy and real-time applicability. The results underscore the importance of efficiently and dynamically estimating parameters, reinforcing the relevance of the study in improving methods of trajectory prediction in counter-battery radar systems. This work also contributes to ballistics and radar systems, providing important results for developing more precise and efficient methods for predicting and analysing of projectile trajectories.

Keywords: Ballistic Trajectories; Extended Kalman Filter; Maximum Likelihood Estimator; Battery Counter Radar; Extrapolation; Launch Point; Impact Point.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Coeficiente de arrasto versus o número Mach para um projétil típico.	27
Figura 2 – Comportamento da densidade do ar com a altitude.	28
Figura 3 – Relação trajetória balística e densidade do ar T_1	29
Figura 4 – Relação trajetória balística e densidade do ar T_2	29
Figura 5 – Trajetória completa morteiro 81 mm PRODAS.	30
Figura 6 – Dados morteiro 81 mm PRODAS.	30
Figura 7 – Modelo Massa Ponto.	31
Figura 8 – Representação do Sistema de Coordenadas ECEF e ENU.	36
Figura 9 – Sistema de Coordenadas AER.	38
Figura 10 – Diagrama em blocos do Filtro de Kalman estendido.	47
Figura 11 – Superfície da Função custo (Cenário I)	55
Figura 12 – Função custo tridimensional (Cenário I)	55
Figura 13 – Superfície da Função custo (Cenário II).	56
Figura 14 – Função custo tridimensional (Cenário II).	56
Figura 15 – Diagrama de blocos do algoritmo de LM.	61
Figura 16 – Correção da amostragem do sinal radar.	64
Figura 17 – Trajetória em coordenadas AER - Projétil 120mm.	64
Figura 18 – Erro das medidas AER do radar.	65
Figura 19 – Medidas do radar nos sistemas de coordenadas AER e ENU.	66
Figura 20 – Exemplo de TLE 80%	82
Figura 21 – Análise do desempenho dos modelos do EKF.	85
Figura 22 – Estimativas do EKF para PI com 14 s de rastreo.	88
Figura 23 – Estimativas do EKF para PI com 12 s de rastreo	88
Figura 24 – Estimativas do EKF para PI com 10 s de rastreo	89
Figura 25 – Estimativas do EKF para PI com 8s de rastreo	90
Figura 26 – Estimativas do EKF para PI com 6 s de rastreo	90
Figura 27 – Estimativas do EKF para PI com 4s de rastreo	91
Figura 28 – Estimativas do EKF para PI com 2s de rastreo	91
Figura 29 – Dispersão (σ) e RMSE das estimativas de PI para o EKF	93
Figura 30 – Estimativas do EKF para PI com 2s de rastreo (P_1).	95
Figura 31 – Estimativas do EKF para PI com 2s de rastreo (P_2)	95
Figura 32 – Estimativas do EKF para PI com 4s de rastreo (P_1).	96
Figura 33 – Estimativas do EKF para PI com 4s de rastreo (P_2).	96
Figura 34 – Estimativas do EKF para PI com 6s de rastreo (P_1).	97
Figura 35 – Estimativas do EKF para PI com 6s de rastreo (P_2).	97
Figura 36 – Estimativas do EKF para PI com 8s de rastreo (P_1).	98

Figura 37 – Estimativas do EKF para PI com 8s de rastreo (P_2).	98
Figura 38 – Estimativas do EKF para PI com 10 s de rastreo (P_1).	99
Figura 39 – Estimativas do EKF para PI com 10s de rastreo (P_2).	99
Figura 40 – Estimativas do EKF para PI com 12s de rastreo (P_1).	100
Figura 41 – Estimativas do EKF para PI com 12s de rastreo (P_2).	100
Figura 42 – Estimativas do EKF para PI com 14s de rastreo (P_1).	101
Figura 43 – Estimativas do EKF para PI com 14s de rastreo (P_2).	101
Figura 44 – RMSE das estimativas de PI para o EKF com medidas radar	102
Figura 45 – Estimativas de C_d fornecidas pelo EKF com as medidas do radar (P_1 e P_2)	103
Figura 46 – Desempenho AG - cenário I.	104
Figura 47 – Desempenho AG - cenário II.	105
Figura 48 – Trajetórias com intervalo de rastreamento de 8 s.	107
Figura 49 – Trajetórias com intervalo de rastreamento de 6 s.	108
Figura 50 – Trajetórias com intervalo de rastreamento de 4 s.	108
Figura 51 – Trajetórias com intervalo de rastreamento de 2 s.	109
Figura 52 – Estimação de PI para intervalo de rastreamento de 8 s.	110
Figura 53 – Estimação de PI para intervalo de rastreamento de 6 s.	111
Figura 54 – Estimação de PI para intervalo de rastreamento de 4 s.	112
Figura 55 – Estimação de PI para intervalo de rastreamento de 2 s.	113
Figura 56 – Estimativa PL - Intervalo de rastreamento de 8 s.	114
Figura 57 – Estimativa PL - Intervalo de rastreamento de 6 s.	115
Figura 58 – Estimativa PL - Intervalo de rastreamento de 4 s.	115
Figura 59 – Estimativa PL - Intervalo de rastreamento de 2 s.	116

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	–	Erro de localização do meio de lançamento e ponto de impacto	20
Tabela 2	–	Parâmetros de desvio padrão de ruído do processo ($i = x, y$ e z) e inicialização da matriz de covariâncias $\mathbf{P}$	84
Tabela 3	–	Tabela de informações do Tiro P_1	94
Tabela 4	–	Tabela de informações do Tiro P_2	94
Tabela 5	–	Tempos de execução para o EKF e Estimador ML	117

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AER	<i>Azimuth-Elevation-Range</i>
BID	Base Industrial de Defesa
BT	<i>Balistic Targets</i>
CRLB	<i>Cramér-Rao Lower Bound</i>
CSD	Comunicações e Inteligência em Sistema de Defesa
CTEx	Centro Tecnológico do Exército
DCT	Departamento de Ciência e Tecnologia
EB	Exército Brasileiro
ECEF	<i>Earth-Centered, Earth-Fixed</i>
EKF	<i>Extended Kalman Filter</i>
EME	Estado-Maior do Exército
ENU	<i>East-North-Up</i>
FK	Filtro de Kalman
FINEP	Financiadora de Estudos e Projetos
FAPEB	Fundação de Apoio à Pesquisa, Desenvolvimento e Inovação Exército Brasileiro
GUI	<i>Graphical User Interface</i>
IME	Instituto Militar de Engenharia
IPP	<i>Impact Point Prediction</i>
ML	<i>Maximum Likelihood</i>
MMF	<i>Multiple Model Filter</i>
PECTI	Plano Estratégico de Ciência, Tecnologia e Inovação
PF	<i>Particle Filter</i>
PI	Ponto de Impacto

PL	Ponto de Laçamento
PRODAS	Projectile Rocket Ordnance Design and Analysis System]
RAM	<i>Rockets, Artillery projectiles and Mortar grenades</i>
ROB	Requisitos Operacionais Básicos
RTA	Requisitos Técnicos Absolutos
RTLI	Requisitos Técnicos, Logísticos e Industriais
SC	Sistema de Coordenadas
SRCB	Sistema Radar de Contrabateria
TLE	<i>Target Location Error</i>
UKF	<i>Unscented Kalman Filter</i>
WGS	<i>World Geodetic System</i>

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
1.1	CONTEXTUALIZAÇÃO E JUSTIFICATIVA	18
1.2	EVOLUÇÃO DA PESQUISA E CONTRIBUIÇÕES	22
1.3	OBJETIVOS DA PESQUISA	23
1.3.1	OBJETIVO GERAL	23
1.3.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	24
1.4	ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO	24
2	FUNDAMENTOS TEÓRICOS	26
2.1	BALÍSTICA EXTERNA DE PROJÉTEIS	26
2.1.1	DINÂMICAS DO MOVIMENTO DE PROJÉTEIS	30
2.1.2	ANÁLISE CINEMÁTICA	33
2.2	SISTEMAS DE COORDENADAS PARA RASTREIO	35
2.2.1	SISTEMA DE COORDENADAS ECEF	36
2.2.2	SISTEMA DE COORDENADAS ENU	36
2.2.3	SISTEMA DE COORDENADAS ESFÉRICO AER	37
2.2.4	TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS AER PARA ENU	38
3	FILTRO DE KALMAN E ESTIMADOR ML APLICADOS À BALÍSTICA	40
3.1	FILTRO DE KALMAN CLÁSSICO	40
3.2	FILTRO DE KALMAN ESTENDIDO	44
3.3	MODELOS CINEMÁTICOS	47
3.3.1	MODELOS CINEMÁTICOS DISCRETOS E MATRIZ DE COVARIÂNCIA DO PROCESSO	48
3.3.2	ESTABILIDADE NUMÉRICA E SUAS IMPLICAÇÕES NO FILTRO DE KALMAN	50
3.4	ESTIMADOR DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA	51
3.4.1	APLICAÇÃO AO PROBLEMA DE BALÍSTICA	51
3.4.2	FUNÇÃO CUSTO DO ESTIMADOR ML PARA O PROBLEMA EM QUESTÃO	54
3.4.3	MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO	56
3.4.3.1	SOLUÇÃO POR ALGORITMOS GENÉTICOS	57
3.4.3.2	SOLUÇÃO POR ALGORITMO DE LEVENBERG-MARQUARDT	57
4	METODOLOGIA ADOTADA	63
4.1	DADOS EXPERIMENTAIS	63

4.2	FILTRO DE KALMAN ESTENDIDO E ESTIMAÇÃO DE TRAJETÓRIA BALÍSTICA	65
4.3	MODELAGENS PARA O PARÂMETRO DE ARRASTO	69
4.3.1	MODELO COM O PARÂMETRO BALÍSTICO β -EKF	70
4.3.2	MODELO COM CONHECIMENTO <i>A PRIORI</i> DO PARÂMETRO BALÍSTICO β_0 -EKF	71
4.3.3	MODELO EXPONENCIAL e -EKF	72
4.3.4	MODELO COM A DENSIDADE DO AR NA VARIÁVEL DE ESTADO γ -EKF	73
4.4	INICIALIZAÇÃO DAS VARIÁVEIS DE ESTADO	74
4.4.1	IMPLEMENTAÇÃO PRÁTICA PARA RASTREIO	75
4.5	EXTRAPOLAÇÃO DA TRAJETÓRIA BALÍSTICA E GANHO DE KALMAN	76
4.6	MÉTRICAS DE AVALIAÇÃO DA ESTIMATIVA	77
4.6.1	O LIMITE INFERIOR DE CRAMER-RAO E A MATRIZ DE INFORMAÇÕES DE FISHER	78
4.6.2	REGIÃO DE CONFIANÇA PARA A ESTIMATIVA DE PI E PL	79
4.6.3	ANÁLISE DE ERROS ABSOLUTOS	81
4.6.4	ERRO DE LOCALIZAÇÃO DO ALVO	81
4.7	SIMULAÇÕES PARA A ESTIMATIVA DO PARÂMETRO DE ARRASTO	82
5	ANÁLISE DE RESULTADOS	86
5.1	ESTIMATIVAS DE PI - EKF	86
5.1.1	SIMULAÇÕES	87
5.1.2	MEDIDAS REAIS	93
5.2	RESULTADOS PARA PI E PL: ESTIMADOR ML	103
5.2.1	SOLUÇÃO POR ALGORITMOS GENÉTICOS	104
5.2.2	SOLUÇÃO POR ALGORITMO DE LEVENBERG-MARQUARDT	105
5.3	ANÁLISE COMPARATIVA DOS TEMPOS DE PROCESSAMENTO: EKF E ESTIMADOR ML	117
6	CONCLUSÃO	118
6.1	CONTRIBUIÇÕES PARA O CAMPO DA BALÍSTICA E SISTEMAS DE RADAR	118
6.2	RECOMENDAÇÕES E DIREÇÕES FUTURAS PARA PESQUISA	119
	REFERÊNCIAS	121
	APÊNDICE A – LINEARIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DE ESTADOS EKF	125
	APÊNDICE B – LINEARIZAÇÃO β_0-EKF	128

APÊNDICE C – LINEARIZAÇÃO e -EKF	130
APÊNDICE D – LINEARIZAÇÃO γ -EKF	131

1 INTRODUÇÃO

Em um panorama global onde os conflitos armados continuam a desempenhar um papel significativo na geopolítica, a tecnologia militar evoluiu para atender às demandas crescentes de precisão, eficiência e responsabilidade. Nos recentes conflitos globais, tem-se notado um aumento significativo no uso de foguetes, artilharia e morteiros (RAM, do inglês, *Rockets, Artillery projectiles and Mortar grenades*) [1]. Diante deste cenário, a eficácia no combate a esses armamentos demanda precisão, confiabilidade e uma resposta rápida, tornando os sistemas radares de contrabateria (SRCB) instrumentos cruciais [2]. Neste contexto, a capacidade de estimar com precisão os pontos de impacto e lançamento de projéteis de artilharia usando radares de contrabateria emerge como um componente crítico da estratégia defensiva e ofensiva das forças armadas.

A evolução da artilharia, acompanhada pelo surgimento dos radares de contrabateria, reforça seu papel vital em estratégias de combate, demonstrando uma significativa evolução desde sua origem. Com o passar dos séculos, a evolução dos sistemas de artilharia foi acompanhada por um aprimoramento correspondente nas tecnologias destinadas a neutralizá-los. Os radares de contrabateria, que surgiram durante a Segunda Guerra Mundial, representam um avanço significativo neste campo. Eles são projetados para detectar os projéteis de artilharia, estimar o ponto lançamento e ponto de impacto instantes depois dessa detecção, permitindo uma resposta rápida ao inimigo.

A importância deste sistema não pode ser subestimada, pois ele não só aumenta a eficácia do contra-ataque, mas também minimiza baixas em bases militares e reduz os danos a infraestruturas críticas. A Guerra do Afeganistão foi um conflito de quase 20 anos entre Estados Unidos e Afeganistão, marcada pela ameaça imposta por ataques terroristas. Nestes combates, observou-se o frequente emprego de RAM's representando sérias ameaças às forças militares, bem como um grande perigo para instalações militares. Assim, uma tarefa importante para pesquisa e desenvolvimento internacional é proteger instalações militares e implementar um sistema de alerta precoce e preciso, que atue contra ameaças de RAM, utilizando tecnologias como os radares *counter-RAM* [1].

A relevância dos SRCB na guerra contemporânea é enfatizada pela natureza dos conflitos modernos, onde a artilharia continua a ser um elemento-chave. A capacidade de localizar rapidamente a origem dos disparos inimigos é crucial, especialmente em cenários de guerra assimétrica. Este aspecto ganhou especial atenção durante a recente guerra na Ucrânia, onde o uso de artilharia pesada tem sido extensivo. A eficácia dos radares de contrabateria nesta região demonstrou não apenas sua importância tática, mas também o impacto que podem ter na dinâmica geral do conflito [3].

Ademais, a eficiência dos radares de contrabateria tem implicações significativas não só do ponto de vista operacional, mas também ético. Em um mundo onde os conflitos armados são cada vez mais observados e analisados por uma audiência global, a precisão na localização de pontos de lançamento e a minimização de danos colaterais tornaram-se questões de importância crítica. Esta realidade eleva o radar de contrabateria de uma ferramenta tática para um instrumento vital na busca por uma guerra mais responsável quanto à condução de operações militares com maior precisão e redução de danos colaterais. Relembrando a importância em minimizar o impacto negativo sobre civis e infraestruturas não-militares, ao mesmo tempo, o sistema pode maximizar a eficácia das operações militares.

A estimação de pontos de impacto e de lançamento não é isenta de desafios. Aspectos como a velocidade do projétil, condições ambientais, e contramedidas eletrônicas podem afetar a precisão dos radares. Além disso, o ambiente de batalha moderno apresenta desafios adicionais, como a necessidade de diferenciar entre diferentes tipos de projéteis e lidar com situações onde múltiplos lançamentos ocorrem simultaneamente.

Os avanços tecnológicos recentes, incluindo melhorias na sensibilidade dos sensores, algoritmos de processamento de dados mais avançados e integração de inteligência artificial, têm contribuído para superar esses desafios. Estes desenvolvimentos permitiram uma precisão maior, tempos de resposta mais rápidos e uma melhor capacidade de adaptação a diferentes cenários de combate.

1.1 Contextualização e Justificativa

Os radares de contrabateria são eficientes na detecção e análise de projéteis de artilharia, incluindo obuses, morteiros e lançadores de foguetes. Utilizando dados de radar, esses sistemas calculam as trajetórias dos projéteis, permitindo estimar tanto a posição de lançamento quanto o ponto de impacto previsto. Essa funcionalidade é crucial para identificar rapidamente a posição do inimigo e possibilitar ações imediatas de resposta.

Além disso, a precisão dos radares e sistemas computacionais atuais permite que os radares *counter*-RAM detectem as posições de lançamento do inimigo, abrangendo desde projéteis de artilharia convencionais até sistemas avançados de foguetes de lançamento múltiplos. Esse processo não apenas contribui para a eficiência defensiva, mas também otimiza a operação das unidades de artilharia próprias ao ajustar suas estratégias com base nas informações adquiridas [4].

No conflito mundial mais recente é possível observar o grande uso de radares *counter*-RAM. A invasão da Ucrânia pela Rússia em 2022 é vista por analistas como o maior confronto militar na Europa desde a Segunda Guerra Mundial. As batalhas vêm sendo marcadas por uma guerra territorial, cercada de ataques a postos fronteiriços e

disputa em diferentes áreas da Ucrânia.

Recentemente, o Exército Brasileiro (EB), por meio de seu Departamento de Ciência e Tecnologia (DCT), valeu-se de um acordo de cooperação técnica com a Empresa Brasileira de Aeronáutica S.A. (Embraer), para a concepção de um Sistema Radar de Contrabateria (SRCB). O acordo teve por finalidade a promoção de estudos preliminares conjuntos dos conceitos técnicos e operacionais do SRCB, bem como a identificação do nível de utilização tecnológica e industrial dos sistemas radares já desenvolvidos pelo Centro Tecnológico do Exército (CTEx) em parceria com a Embraer na concepção, pesquisa e desenvolvimento de potenciais radares de contrabateria, que atendam aos requisitos do EB.

No final de 2022, foi assinado Convênio envolvendo o CTEx, o IME, a FAPEB e a FINEP para a Pesquisa e Desenvolvimento de um Demonstrador Tecnológico do Radar de Contrabateria. Dentro do escopo deste convênio, foi assinado o contrato FAPEB-Embraer, que se desenrola como o segundo passo do acordo de cooperação.

Por meio das seguintes portarias, ficaram estabelecidos os requisitos operacionais, técnicos, logísticos e industriais do SRCB:

- Portaria Nº 59-EME, de 13 de março de 2019: aprova os requisitos operacionais básicos (ROB) do Radar Multifunção do Sistema de Artilharia de Campanha (EB20-RO-04.027), 1ª Edição, 2019 [5]; e
- Portaria Nº 60-EME, de 13 de março de 2019: aprova os requisitos técnicos, logísticos e industriais (RTLI) do Radar Multifunção do Sistema de Artilharia de Campanha (EB20-RO-04.016), 1ª Edição, 2019 [6].

Os requisitos técnicos absolutos (RTA) são aqueles indispensáveis e incontestáveis. Destacam-se nesse campo os seguintes RTA's de interesse:

- RTA 15 - O Radar Multifunção deve ser capaz de exibir para o operador as coordenadas absolutas da posição estimada do meio de lançamento em até 2s (dois segundos) após a detecção do fogo de artilharia.
- RTA 20 - O Radar Multifunção deve ser capaz de exibir para o operador as coordenadas absolutas da posição estimada do ponto de impacto em até 2s (dois segundos) após a detecção do fogo de artilharia.
- RTA 26 - A Estação de Trabalho do Radar Multifunção deve ser capaz de exibir ao operador representações gráficas das posições estimadas dos meios de lançamento dos fogos de artilharia sobre a carta digital georreferenciada.

- RTA 27 - A Estação de Trabalho do Radar Multifunção deve ser capaz de exibir ao operador representações gráficas das posições estimadas dos pontos de impacto dos fogos de artilharia sobre a carta digital georreferenciada.

Além destes requisitos técnicos absolutos, a Tabela 1 resume alguns requisitos importantes [5], incluindo requisitos com parâmetros associados ao erro de localização do alvo (TLE, do inglês, *target location error*). O TLE corresponde ao raio em metros, a partir da posição verdadeira do alvo, que define uma circunferência que contém X% de tentativas de calcular a posição verdadeira do alvo. Por exemplo, um erro de localização a 90% (TLE 90%) da posição estimada do ponto de impacto do fogo de artilharia, definido como o raio em metros, a partir da posição verdadeira de impacto, que define uma circunferência que contém 90% de tentativas de calcular a posição verdadeira. O requisito é definido como o maior valor entre uma medida absoluta em metros e um percentual da distância em que o projétil foi detectado.

Como um exemplo concreto, pode-se ver na Tabela 1 que o radar contrabateria deve ter TLE 50% (erro de localização do alvo a cinquenta por cento) para coordenadas absolutas da posição estimada dos meios de lançamento de 0,35% da distância em que um obus foi detectado, ou de 35 m, o que for maior. Compreender e prever o TLE é crucial para o desenvolvimento de armas autônomas, devido aos baixos erros circulares prováveis que são almejados [7].

Tabela 1 – Erro de localização do meio de lançamento e ponto de impacto

Tipo de arma (alvo)	TLE (%)	Distância da detecção
Obus 155mm	50	0,35% ou 35m
	90	0,90% ou 90m
Foguete SS-40	50	0,40% ou 70m
	90	1,0% ou 175m
Morteiro 120mm	85	0,25% ou 30m

Com a intenção de se trabalhar com uma base de dados reais, por meio de medidas de sistemas radares, foram obtidas informações do Sistema Transportável para Rastreamento de Engenheiros em Voo (STREV). O sistema foi comercializado pela empresa brasileira Omnisys, subsidiária da Thales, uma multinacional francesa especializada em sistemas eletrônicos de alta tecnologia. O STREV incorporou componentes modernizados do sistema radar de banda C que já operava no Centro de Avaliações do Exército - CAEx. O sistema de rastreamento consegue fornecer informações essenciais para a análise de desempenho de foguetes, mísseis e munições. Ele inclui radares de rastreamento, sistemas ópticos, estações de comando e controle, telemetria e centro de comando e controle [8].

A utilização dessa base de dados se concentrou nas medidas do radar de Banda C que compõe o sistema de rastreamento em questão. Essas medidas foram obtidas de lançamentos

de diferentes tipos de armas como morteiros 81mm e 120mm. Desta forma, é possível descrever as trajetórias desses engenhos através de medições, como: elevação, distância e azimute. Por meio de transformações dos sistemas de coordenadas, o cálculo da posição do engenho deve ser representado por coordenadas cartesianas. A importância dessas medidas reais é que elas podem fornecer informações das posições de projéteis de forma semelhante às utilizadas pelos radares de contrabateria.

É possível, por meio da teoria de balística externa, criar diferentes modelos que se alteram conforme a complexidade do problema e a exigência dos requisitos do SRCB planejado pelo Exército Brasileiro. Ademais, vislumbra-se analisar os dados simulados com dados reais, para permitir ajustes nos modelos considerados. Os requisitos técnicos absolutos mencionados acima, que fazem parte de um conjunto de exigências observadas nas portarias do SRCB, podem ser avaliados e o trabalho pode atuar nesses requisitos para verificar e responder se essas exigências são atendidas pelos modelos propostos.

Cabe ressaltar que o projeto do SRCB, na sua primeira etapa, contempla a pesquisa, o desenvolvimento e a construção de um demonstrador de tecnologia para um radar de contrabateria a partir da tecnologia desenvolvida no projeto do radar SABER M200 MM.

Conforme previsão observada no Plano Estratégico do Exército (2020-2023) [9], o projeto dos radares M200 está em fase final de desenvolvimento. Assim sendo, os conhecimentos adquiridos neste projeto do M200 podem ser utilizados para se aprofundar nos futuros projetos, tais como o SRCB pretendidos pelo EB, o que também concorda com o Plano Estratégico de Ciência, Tecnologia e Inovação - PECTI (2020 - 2023) [10].

O estudo proposto se enquadra na Política e Estratégia Nacional de Defesa [11], ao promover a formação em ciências básica e aplicada, privilegiando-se a aproximação da produção científica com as atividades relativas ao desenvolvimento de análises estratégicas, ao desenvolvimento tecnológico da Base Industrial de Defesa (BID) e ao aprimoramento dos instrumentos de gestão e aperfeiçoamento de doutrinas operacionais. Além disso, capacitar engenheiros e pesquisadores para o desenvolvimento de tecnologias conforme os planos do EB também é uma das tarefas voltadas ao aperfeiçoamento do sistema de ciência, tecnologia e inovação do país.

O presente trabalho possui relação direta com uma das linhas de pesquisa do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Defesa do Instituto Militar de Engenharia (IME) e pode apresentar impacto tecnológico por se tratar de um tema de interesse do Exército Brasileiro. Assim, este trabalho contribui para a propagação de técnicas e conhecimentos que podem ser empregados pelas Forças Armadas brasileiras, oferecendo também potencial para auxiliar no desenvolvimento da Indústria de Defesa Nacional.

1.2 Evolução da Pesquisa e Contribuições

No trabalho apresentado por [1], é apresentado um método para a determinação da trajetória, calibre e tipo de projétil com base na estimativa do coeficiente balístico. Através de simulações, é desenvolvido um processo de otimização para o ajuste iterativo de trajetórias previstas em tempo real. Métodos analíticos e numéricos são propostos para reduzir o tempo de processamento, visando aplicações em sistemas computacionais de baixo custo e fora da área de missões. O trabalho permite a visualização dos resultados em uma interface gráfica e ressalta a necessidade da representação tridimensional da trajetória.

No artigo de [12], um método de filtro de múltiplo modelo MMF (do inglês, *multiple model filter*) é implementado para a estimativa do estado de projéteis balísticos e sua identificação, utilizando medições de radar para a previsão do ponto de impacto (IPP). A identificação do projétil é baseada no conhecimento do método de estabilização usado, sendo crucial para a precisão do ponto de impacto. O estudo demonstra que, por simulações em trajetórias de diversos projéteis, é possível identificar o tipo de projétil com alta probabilidade e prever o ponto de impacto com precisão e consistência. No entanto, o trabalho se concentra apenas na estimativa do ponto de impacto (PI) e não aborda a estimativa do ponto de lançamento (PL).

O artigo [13] apresenta um estudo sobre técnicas de estimativa não linear para a previsão do ponto de impacto de alvos balísticos considera três algoritmos: o filtro de Kalman estendido (EKF), o filtro de Kalman unscented (UKF) e o filtro de partículas (PF). Utilizando medidas iniciais da trajetória como condição inicial, os autores resolvem numericamente as equações de movimento para obter a previsão do ponto de impacto. As técnicas são comparadas em termos de previsão de pontos de impacto e limites inferiores teóricos de erro de estimativa de Cramer-Rao. O estudo conclui que o filtro de partículas não apresenta melhorias significativas em relação ao EKF e UKF no modelo dinâmico utilizado, o que justifica a continuidade do uso do EKF para estimativas de ponto de impacto.

No artigo [2] é proposto um método para fusão de dados de radares por medições assíncronas, utilizando o Estimador de Máxima Verossimilhança. Este método é aplicado para o rastreamento de trajetórias balísticas, com uma avaliação focada na precisão e robustez contra ruídos e incertezas presentes nas medidas. Os resultados obtidos se baseiam na premissa de conhecimento prévio das características dos coeficientes balísticos dos projéteis. Adicionalmente, o estudo ressalta a necessidade de implementação de um algoritmo para estimativa online do coeficiente balístico.

O estudo apresentado no artigo [14] explora a estimativa de pontos de lançamento e impacto de alvos balísticos, além de sua classificação, com base em dados de radar. Emprega-se o Estimador de Máxima Verossimilhança, em conjunto com um banco de dados

que inclui informações prévias sobre variáveis como o coeficiente de arrasto aproximado e detalhes sobre as propriedades dinâmicas do alvo. Os resultados obtidos dependem desse banco de dados contendo as informações *a priori* do alvo.

O trabalho apresentado em [15] utiliza um filtro digital durante as medidas iniciais do radar e posteriormente um modelo Gaussiano para modelar o coeficiente de arrasto. Por meio deste modelo é possível extrapolar e estimar a trajetória futura do projétil numericamente, mediante métodos como o Runge-Kutta de 4ª ordem, permitindo prever o ponto de impacto com base no modelo balístico adotado.

No presente trabalho, são destacadas análises comparativas entre estimativas geradas por dois diferentes estimadores: o EKF clássico, conforme exemplos nos trabalhos [12] e [13], e o Estimador de Máxima Verossimilhança, adaptado de estudos como [2] e [14]. Essas análises focam na correspondência dessas estimativas com os requisitos técnicos estabelecidos para o SRCB do Exército Brasileiro. Esta abordagem permitiu uma compreensão da relevância e aplicabilidade de alguns requisitos de projeto, fornecendo conhecimentos sobre a viabilidade desses critérios e sua consonância com os resultados observados.

Além disso, a inclusão de medições realizadas pelo radar de banda C do sistema de rastreamento STREV enriqueceu a pesquisa, criando um paralelo direto com as condições operacionais reais. Essa integração possibilitou uma avaliação mais exata e confiável das estimativas de ponto de impacto efetuadas pelo Filtro de Kalman, conciliando os conceitos teóricos com as aplicações no mundo real.

1.3 Objetivos da Pesquisa

1.3.1 Objetivo Geral

O objetivo central da pesquisa visa desenvolver e avaliar modelos para a estimação de trajetórias balísticas em sistemas de radar de contrabateria. Para atingir isso, será desenvolvido e analisado um modelo específico que incorpora o uso do Filtro de Kalman Estendido e o Estimador de Máxima Verossimilhança. Esta abordagem tem como foco garantir uma estimativa de trajetória de projéteis com a precisão necessária, considerando a eficiência e a eficácia operacional dos sistemas de radar de contrabateria. Adicionalmente, realizar um estudo comparativo abrangente das técnicas de estimação de trajetória balística apresentadas na literatura, especificamente aplicadas aos RTAs do Sistema de Radar Contrabateria (SRCB), conforme descrito em [5] e [6]. O objetivo é avaliar métodos eficientes para representar trajetórias balísticas estimadas, adequadas para implementações em tempo real em sistemas de radares contrabateria.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Estudar a modelagem balística de projéteis, explorar os aspectos fundamentais da balística externa, focando nas dinâmicas do movimento dos projéteis e nos fatores que influenciam seu comportamento.
- Investigar a aplicabilidade do filtro de Kalman estendido em sistemas dinâmicos. Avaliar a eficácia do Filtro de Kalman Estendido em prever e corrigir trajetórias, particularmente em relação a modelos de processos não lineares.
- Estudar e comparar variadas abordagens de modelagem para o parâmetro de arrasto, determinando qual oferece a melhor precisão na estimativa de trajetórias.
- Avaliar o método do Estimador de Máxima Verossimilhança, investigar sua eficácia na estimação de pontos de lançamento e impacto de projéteis, comparando-o com outras técnicas.
- Demonstrar a aplicabilidade prática e em tempo real dos métodos estudados. Validar os métodos desenvolvidos mediante simulações e análises, destacando sua utilidade e eficiência em cenários de aplicação real e em tempo real.
- Focar especificamente no problema de determinação do ponto de lançamento (PL) de projéteis, abordando-o em conjunto com o problema de estimação do ponto de impacto. Este objetivo visa suprir uma lacuna na literatura, proporcionando uma análise da estimação do PL de projéteis, que é menos explorada.

1.4 Estrutura da Dissertação

Este trabalho está estruturado em capítulos, cada um desempenhando uma função essencial na exposição e elucidação do conteúdo abordado.

O Capítulo 2 se dedica aos Fundamentos Teóricos, focando nos aspectos técnicos e tecnológicos subjacentes à estimação de pontos de impacto e lançamento. Este capítulo inclui detalhes sobre a balística externa de projéteis, dinâmicas do movimento de projéteis, análise cinemática, e diferentes sistemas de coordenadas para rastreamento.

No Capítulo 3, combinamos os tópicos que abrangem o Filtro de Kalman e o Estimador de Máxima Verossimilhança aplicados a trajetórias balísticas. Este capítulo cobre desde o Filtro de Kalman Clássico e Estendido até os Modelos Cinemáticos, e discute detalhadamente o Estimador de Máxima Verossimilhança, incluindo suas aplicações, função custo e métodos de otimização.

O Capítulo 4, detalha a metodologia adotada na pesquisa, abordando os dados experimentais, o uso do Filtro de Kalman Estendido na estimação de trajetória balística, as modelagens para o parâmetro de arrasto, e simulações para estimar esse parâmetro.

No Capítulo 5, são apresentados os resultados obtidos, focando na estimação de PI com o EKF e seguindo com os resultados para PI e PL pelo Estimador ML, abordando a solução por Algoritmos Genéticos e detalhando a solução por Algoritmo de Levenberg-Marquardt.

Finalmente, o Capítulo 6 sintetiza os principais achados da pesquisa, discute as contribuições para o campo da balística e sistemas de radar, e oferece recomendações e direções futuras para pesquisa.

2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Este capítulo pretende estabelecer a base teórica necessária para o entendimento e desenvolvimento do trabalho no que tange os conceitos básicos utilizados nos capítulos seguintes. Inicialmente, na Seção 2.1, são mostrados os fundamentos da balística externa, essenciais para compreender a dinâmica de projéteis. Segue-se uma análise detalhada da dinâmica do movimento de projéteis e uma investigação sobre a cinemática associada. Por fim, são abordados os sistemas de coordenadas na Seção 2.2, utilizados para o rastreamento, que desempenham um papel crucial ao longo de nossa análise e discussão.

2.1 Balística Externa de Projéteis

A balística externa estuda o movimento de projéteis no espaço após deixarem a boca do armamento até o momento do impacto com o alvo. Este ramo da dinâmica de corpos rígidos envolve a análise das forças gravitacionais e aerodinâmicas que influenciam o trajeto do projétil. Seu escopo abrange a dinâmica e estabilidade dos projéteis, previsão da trajetória de voo, tempo de voo, ângulo, velocidade e localização do impacto. Modernamente, a balística externa também engloba o projeto e a análise de algoritmos de orientação para projéteis guiados [16].

O modelo balístico fundamental baseia-se na Segunda Lei de Newton e nas equações de movimento. Ele considera tanto a resistência do ar (arrasto) quanto a força da gravidade. Em casos específicos, como foguetes, um vetor de empuxo adicional é considerado, geralmente gerado por gases de combustão com velocidades que variam entre 1800 e 4500 m/s. A aceleração da gravidade $\mathbf{g}$ atua na direção vertical sobre a massa pontual do projétil, neste trabalho, consideramos que a aceleração da gravidade tem um módulo de $|\mathbf{g}|=9.80665$ m/s², valor este adotado ao nível do mar [17].

Na modelagem, o arrasto aerodinâmico é um fator crucial, variando com a velocidade do projétil, seu peso e forma aerodinâmica. As propriedades do ar, como densidade, temperatura, vento e velocidade do som, também influenciam o arrasto. O coeficiente de arrasto é particularmente importante e varia com o número *Mach* (Ma) o qual é representado pela Equação (2.1), uma medida adimensional da velocidade definida pela razão entre a velocidade do objeto $|\mathbf{v}|$ e a velocidade do som no meio v_s .

$$M_a = \frac{|\mathbf{v}|}{v_s} \quad (2.1)$$

Em contextos atmosféricos, v_s é influenciada principalmente pela temperatura. Uma formulação comum para aproximar v_s no ar é $v_s = 331,5 \times \sqrt{1 + \frac{T_a}{273}}$ m/s, com T_a sendo a

temperatura ambiente em graus Celsius. Esta relação reflete como a velocidade do som aumenta com a elevação da temperatura [18].

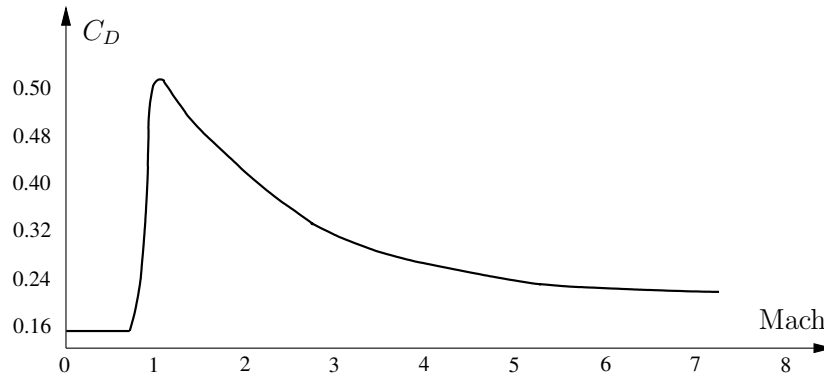


Figura 1 – Coeficiente de arrasto versus o número Mach para um projétil típico.

A Figura 1 ilustra a relação do coeficiente de arrasto com a velocidade do objeto, destacando como diferentes velocidades *Mach* o afetam, o gráfico foi adaptado de [19]. A relação entre o coeficiente de arrasto (C_D) e o número Mach depende de diversos fatores sendo influenciada por características aerodinâmicas específicas de um objeto, como sua forma, tamanho e condições do fluxo de ar ao redor dele. Geralmente, essa relação é determinada por meio de dados experimentais, especialmente porque o comportamento do fluxo de ar pode mudar significativamente com diferentes velocidades.

A influência das condições atmosféricas, particularmente a variação da densidade do ar em função da altitude, é fundamental na determinação da trajetória de projéteis. Mudanças sutis nas características atmosféricas podem provocar desvios consideráveis nas trajetórias de projéteis de longo alcance. Tais variações, mesmo que mínimas, podem influenciar significativamente o ponto de impacto de um projétil, com efeitos mais pronunciados em distâncias maiores.

Ao nível do mar, onde a pressão atmosférica é mais elevada, o ar tende a ser mais denso. À medida que ascendemos em altitude, essa densidade decresce progressivamente, um fenômeno que se deve principalmente à redução da pressão atmosférica com a elevação da altitude [20]. Por meio do modelo exponencial da densidade do ar apresentado em [16], é possível analisar essa influência atmosférica e suas variações com a altitude que o objeto balístico percorre. De maneira mais precisa, trata-se de uma função exponencial que varia localmente em função da altitude, conforme detalhado por

$$\rho(z) = \rho_0 e^{-hz}, \quad (2.2)$$

onde:

ρ_0 - densidade do ar no local do tiro (kg/m^3)

z - altitude do local de tiro (m)

$\rho(z)$ - densidade do ar na altitude z (kg/m^3)

h - fator de decaimento da densidade do ar com a altitude ($1/\text{m}$)

A Figura 2 representa graficamente o comportamento da densidade conforme o aumento da altitude, expressa no trabalho como z em um intervalo de até 30 km e nos mostra a grande queda no valor da densidade $\rho(z)$. Os mísseis táticos, por exemplo, podem atingir altitudes de algumas centenas de metros a alguns quilômetros, usados em teatros de guerra para atingir alvos específicos dentro de uma área de combate [21].

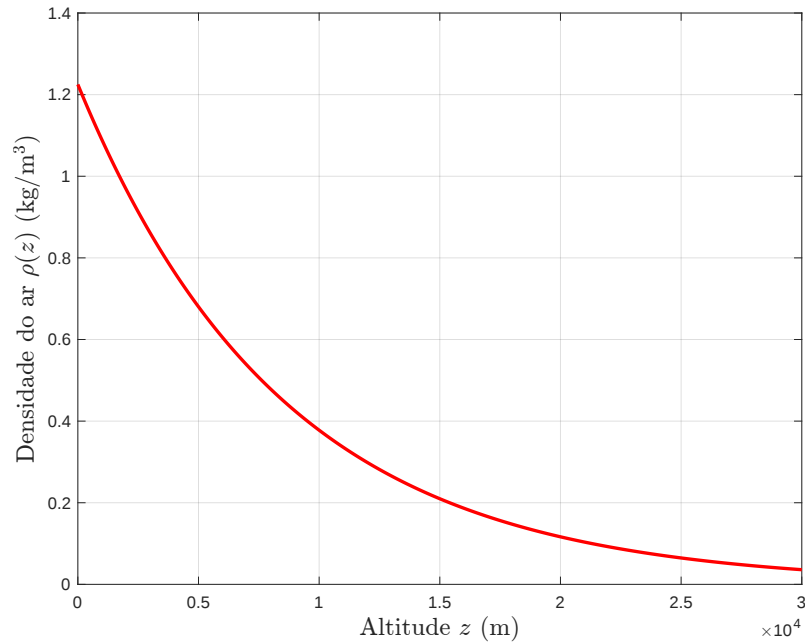


Figura 2 – Comportamento da densidade do ar com a altitude.

As Figuras 3 e 4 ilustram o comportamento da densidade do ar em trajetórias simuladas para projéteis de morteiro 81 mm. Na Figura 3, é evidenciado o comportamento da trajetória T_1 , na qual o projétil alcança uma altitude superior a 5 km, acompanhada por uma redução aproximada de 50% na densidade do ar. Já na trajetória T_2 , apresentada na Figura 4, o disparo atinge um pico de altitude de 1586 m, resultando em uma diminuição de cerca de 20% na densidade do ar (ρ). Este comportamento destaca uma das variáveis que aumentam a complexidade do desafio de estimar trajetórias, pois a densidade do ar é um dos parâmetros cruciais no equacionamento dos modelos balísticos empregados na descrição do movimento desses objetos.

Nas Figuras 5 e 6, apresentamos a trajetória simulada de um morteiro de 81 mm de massa 4,036 kg, velocidade inicial de 301,9 m/s e elevação do tiro de 45° , realizada no software PRODAS® (*Projectile Rocket Ordnance Design and Analysis System*) [22]. Os resultados obtidos através do PRODAS foram empregados para ilustrar a curva de arrasto característica do projétil, bem como a variação do coeficiente de arrasto em função da velocidade deste projétil, evidenciados pela cor vermelha nos gráficos.

Em conclusão, a modelagem do coeficiente de arrasto, devido à sua natureza não linear evidenciada na curva de arrasto do projétil, representa um desafio significativo. Esta característica destaca as consideráveis dificuldades na modelagem deste parâmetro essencial, que demonstra variações distintas e complexas em relação ao número *Mach*. Este fato destaca a necessidade de abordagens sofisticadas e precisas no estudo balístico, enfatizando a importância de uma análise detalhada para a compreensão do comportamento dos projéteis.

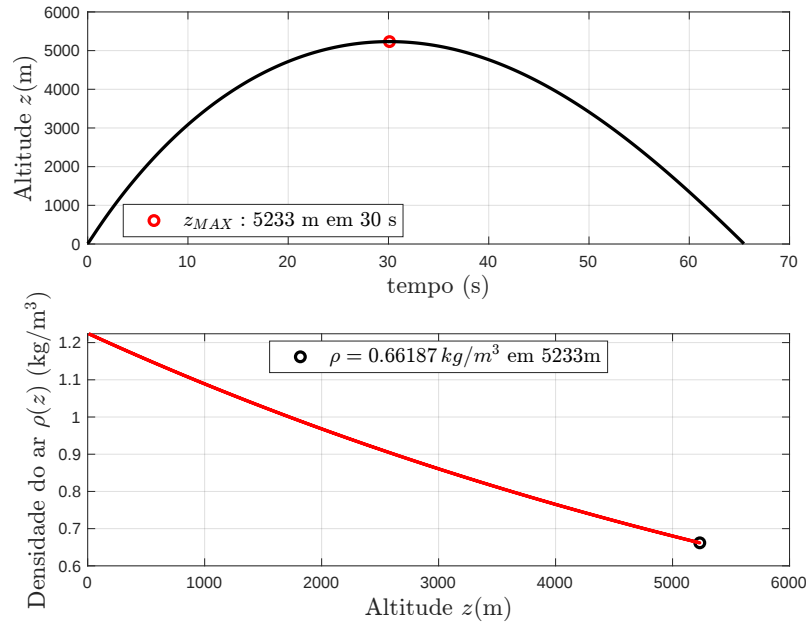


Figura 3 – Relação trajetória balística e densidade do ar T_1 .

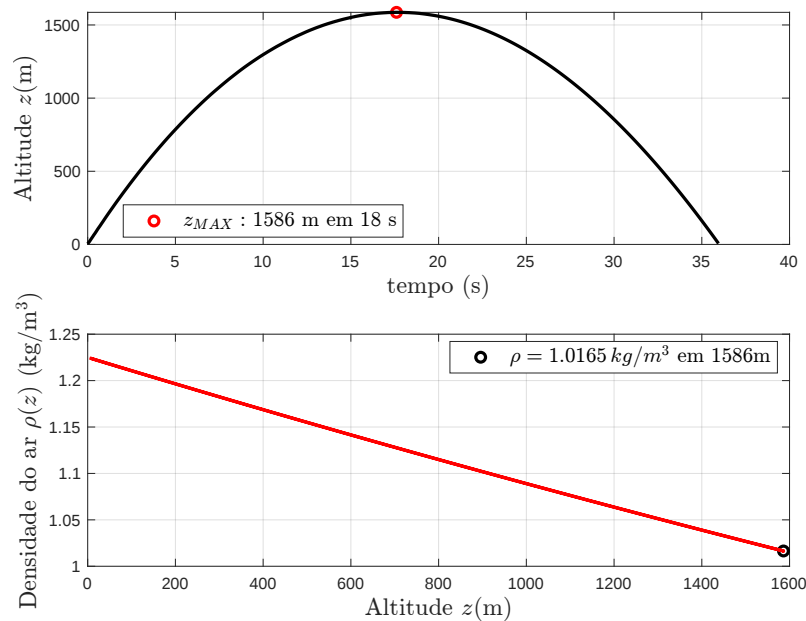


Figura 4 – Relação trajetória balística e densidade do ar T_2 .

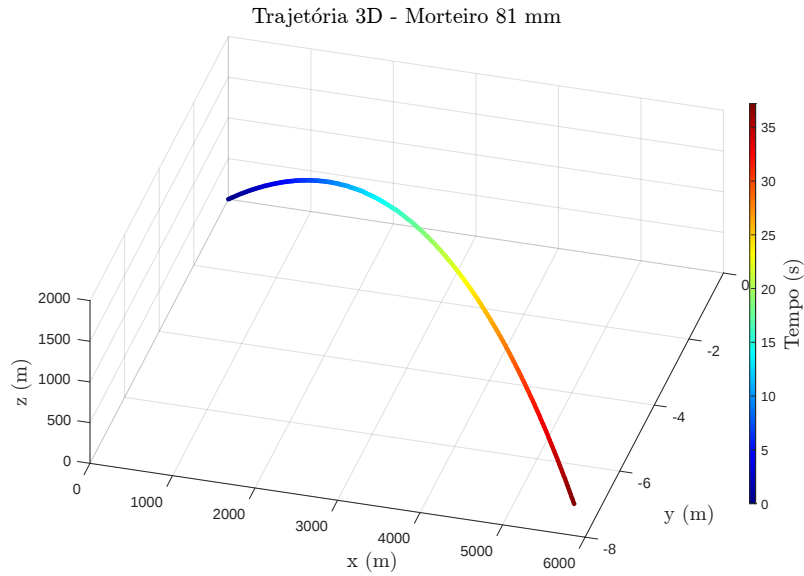


Figura 5 – Trajetória completa morteiro 81 mm PRODAS.

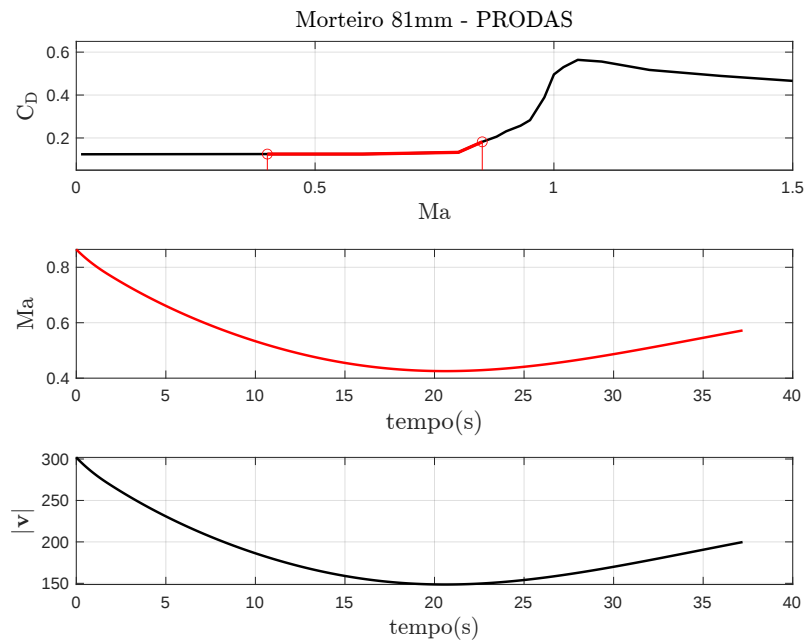


Figura 6 – Dados morteiro 81 mm PRODAS.

2.1.1 Dinâmicas do Movimento de Projéteis

Nesta subseção, deduzimos as equações diferenciais que regem a trajetória de um corpo de massa pontual, conforme detalhado em [16]. O enfoque inicial é em um sistema de coordenadas retangulares: o eixo y alinha-se tangencialmente à superfície terrestre no ponto de lançamento, direcionando-se do lançador ao alvo; o eixo z é definido verticalmente para cima a partir do ponto de lançamento; e o eixo x se estende no plano tangente à Terra no ponto de lançamento. A Figura 7 apresenta este sistema de coordenadas, uma trajetória típica de massa pontual e as variáveis pertinentes.

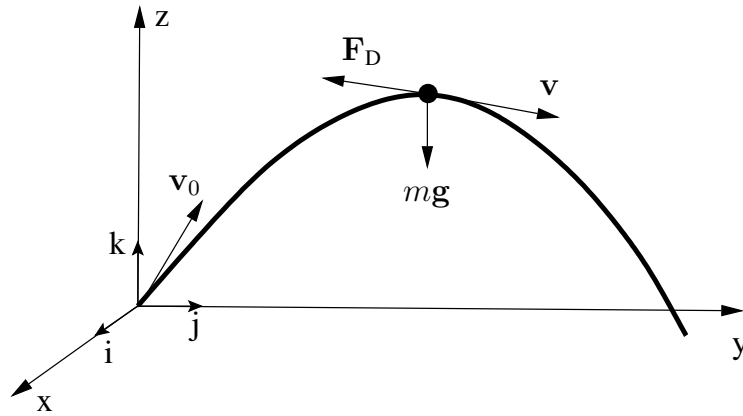


Figura 7 – Modelo Massa Ponto.

De acordo com a segunda lei de Newton e considerando um projétil de massa constante, desconsiderando-se a aceleração de Coriolis atribuída à rotação da Terra, a dinâmica do projétil pode ser descrita pelas seguintes Equações [19]:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}, \quad e \quad (2.3)$$

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \sum_{i=1}^I \mathbf{F}_i + m\mathbf{g}, \quad (2.4)$$

onde:

m - é a massa do projétil

$\mathbf{v}$ - o vetor velocidade

$\mathbf{a}$ - o vetor aceleração

$\sum_{i=1}^I \mathbf{F}_i$ - o vetor da soma das forças aerodinâmicas

$\mathbf{g}$ - o vetor da aceleração da gravidade

Em um projétil balístico as forças aerodinâmicas principais são o arrasto e a gravidade. Outras forças como sustentação (*lift*), força Magnus e força de Coriolis podem atuar no projétil, mas são menos significativas sendo negligenciadas neste trabalho. Essas forças, com a velocidade inicial e o ângulo de disparo, determinam a trajetória do projétil.

Portanto, considera-se que apenas a força de arrasto está atuando para desacelerar o projétil, enquanto a força gravitacional o atrai em direção ao solo. A força de arrasto aerodinâmica exercida sobre o projétil é descrita pela Equação (2.5).

$$\mathbf{F}_D = -\frac{1}{2} \rho S C_D |\mathbf{v}| \mathbf{v}, \quad (2.5)$$

onde,

S - a área da seção transversal do projétil

ρ - a densidade do ar

$\mathbf{v}$ - o vetor velocidade do projétil

C_D - o coeficiente de arrasto

Como mencionado anteriormente, o coeficiente de arrasto C_D é influenciado pela razão de velocidades Ma , como demonstrado na Figura 1. Sua relação com o número *Mach* não é linear e nem direta. Na literatura, identificam-se três categorias distintas de coeficiente de arrasto, cada uma caracterizada por comportamentos únicos em função do número *Mach* [19]:

1. C_D aproximadamente constante - é útil para o regime de voo subsônico: $Ma < 1$
2. C_D inversamente proporcional ao número *Mach*, podendo se estabilizar em valores muito elevados - é característica do regime de voo supersônico alto: $Ma \gg 1$
3. C_D inversamente proporcional à raiz quadrada do número *Mach* - útil no regime supersônico baixo: $Ma \geq 1$

A força de arrasto atuante no projétil pode ser expressa pelo seu módulo como sendo

$$F_D = \frac{1}{2} \rho v^2 S C_D. \quad (2.6)$$

A título de simplificação, adota-se na Equação (2.6) que,

$$C_D^* = \frac{\rho S C_D}{2m} = \frac{\rho \pi}{8} \frac{C_D}{C} \quad (2.7)$$

onde C_D^* será utilizada na Equação (2.10).

Considerando que a área da seção transversal S do projétil é calculada como sendo uma circunferência, e d corresponde ao diâmetro dessa circunferência:

$$S = \frac{\pi d^2}{4}. \quad (2.8)$$

O coeficiente balístico C é definido como:

$$C = \frac{m}{d^2}. \quad (2.9)$$

Combinando as Equações (2.4), (2.6) e (2.7) e dividindo pela massa, obtém-se a aceleração representada por

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{2m} \rho S C_D \mathbf{v} |\mathbf{v}| + \mathbf{g}. \quad (2.10)$$

Separando os vetores de velocidade, aceleração e gravidade em componentes ao longo dos eixos de coordenadas, temos

$$\mathbf{g} = -g\mathbf{k} \quad (2.11)$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{v}_x \mathbf{i} + \dot{v}_y \mathbf{j} + \dot{v}_z \mathbf{k} \quad (2.12)$$

onde o símbolo $(\dot{})$ denota a derivada em relação ao tempo. Conforme a Figura 7, os vetores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ são vetores unitários nas direções de x , y e z , respectivamente.

Se decomposermos a Equação (2.10), temos três equações diferenciais acopladas, ordinárias e não lineares, representadas por

$$\dot{v}_x = -C_D^* |\mathbf{v}| v_x \quad (2.13)$$

$$\dot{v}_y = -C_D^* |\mathbf{v}| v_y \quad (2.14)$$

$$\dot{v}_z = -C_D^* |\mathbf{v}| v_z - g. \quad (2.15)$$

Com essas definições, a Equação (2.2) pode ser incorporada nas Equações (2.7) e (2.10) para obter uma representação mais exata da dinâmica do projétil.

2.1.2 Análise Cinemática

Como demonstrado nas equações anteriores, o coeficiente de arrasto C_D é um elemento crucial na dinâmica de objetos em voo atmosférico. Neste contexto, a literatura propõem duas abordagens distintas: uma que incorpora o conhecimento *a priori* do coeficiente de arrasto e outra que dispensa deste conhecimento.

Inicialmente, assumindo que o coeficiente de arrasto C_D é um parâmetro conhecido, pode-se desenvolver modelos de movimento na forma do espaço de estados, conforme detalhado na Equação (2.16). Este modelo será empregado como base ao longo deste trabalho, a partir do qual serão derivados novos modelos com variações na modelagem do arrasto.

A abordagem do espaço de estados, uma ferramenta versátil na análise de sistemas dinâmicos, permite uma modelagem detalhada e precisa de fenômenos complexos, como a trajetória de um projétil [23]. Conhecendo-se o coeficiente de arrasto C_D é possível aplicar uma abordagem em espaço de estados para desenvolver modelos de movimento. No modelo de espaço de estados, as variáveis de estado capturam aspectos críticos do sistema, como posição e velocidade do projétil, e a influência do arrasto é integrada diretamente nas equações de estado. Esse equacionamento facilita não apenas a representação precisa da dinâmica do projétil, mas também a aplicação de técnicas de controle e estimação. Portanto, o espaço de estados é o método utilizado para modelar a trajetória de projéteis, proporcionando um quadro abrangente para entender e prever o comportamento dinâmico de objetos balísticos, sob diversas condições.

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = -C_D^* \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

A suposição de um coeficiente de arrasto conhecido facilita a modelagem do movimento de um projétil. No entanto, na prática, essa condição é raramente atendida. Consequentemente, o coeficiente de arrasto, um parâmetro crucial na dinâmica do projétil, é geralmente desconhecido e deve ser estimado.

A abordagem convencional para resolver este problema envolve a expansão do vetor de estado. Assim, o vetor é aumentado com parâmetros variantes no tempo, destinados a modelar o coeficiente de arrasto, integrando estas variáveis à equação dinâmica juntamente com um modelo cinemático previamente estabelecido, obtendo um modelo dinâmico mais robusto para o projétil. A forma mais simples para se implementar esse aumento do vetor de estado é incorporando o coeficiente de arrasto. Dessa forma, um vetor de estado pode ser definido como $\mathbf{x} = [x \ y \ z \ \dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z} \ C_D^*]^T$, ou seja, considerando-se o coeficiente de arrasto como um parâmetro desconhecido.

Conforme discutido por [24], o coeficiente C_D^* pode ser modelado como um processo aleatório de Wiener, caracterizado por incrementos independentes. Assim, a derivada temporal dessa variável de estado $\dot{C}_D(t)$ é definida como

$$\dot{C}_D(t) = w_{C_D}(t), \quad (2.17)$$

onde $w_{C_D}(t)$ é um ruído branco de média zero. A derivada em relação ao tempo de um processo de Wiener (ou movimento Browniano) é modelada como um ruído branco gaussiano de média zero. Os autores de [24] afirmam que este modelo de arrasto é provavelmente o mais comum na literatura de rastreamento.

Na realidade, o coeficiente de arrasto C_D não é uma constante, mas sim uma função que depende da altitude z e da velocidade do alvo, como observamos na Figura 6. Para essa abordagem, a literatura, especificamente [24], propõe um modelo exponencial para a densidade do ar, caracterizado por parâmetros constantes ρ_0 e h . O coeficiente balístico C pode ser aproximado por uma função linear em relação à altitude z , expressa por $C = C_0 + C_1 z$, onde C_0 e C_1 são parâmetros desconhecidos. Estes parâmetros são então integrados ao vetor de estado para posterior estimação.

O parâmetro de arrasto também pode ser modelado considerando seu desvio a partir de um valor nominal previamente conhecido, $\bar{C}_D$, em termos da razão $C_D/\bar{C}_D$. Supõe-se que o logaritmo desse quociente, denotado por $\delta(t) \triangleq \ln(C_D/\bar{C}_D)$, seja constante, isto é, $\dot{C}_D/C_D = 0$ com $C_D = \bar{C}_D e^{\delta(t)}$. Com esta suposição, um modelo cinemático pode ser expandido para incorporar a modelagem proposta. De acordo com [24], é mais eficaz adotar $\dot{\delta}(t) = w_\delta(t)$, onde $w_\delta(t)$ é um ruído branco, ou modelar $\delta(t)$ como um processo Markoviano de primeira ordem. A fixação de um valor nominal $\bar{C}_D$ limita a aplicabilidade do modelo a uma classe específica de alvos cujo C_D é equivalente ao $\bar{C}_D$ escolhido.

Finalmente, uma modelagem que também é apresentada em [25] e [26], é útil

quando o modelo linear anterior pode não ser exato em determinadas faixas de altitude. Neste método propõe-se a inclusão de uma nova variável $\gamma \triangleq C_D^* \rho(z)$, juntamente com a sua respectiva equação dinâmica $\dot{\gamma} = -h\gamma\dot{z}$. Esta abordagem utiliza o modelo local exponencial para ρ , conforme descrito na Equação (2.2). O modelo completo é então descrito pelas Equações (2.18) e (4.25).

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\gamma\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$$\dot{\gamma} = -h\gamma\dot{z} \quad (2.19)$$

É importante destacar que, nesta modelagem detalhada, o parâmetro h desempenha um papel crucial, apesar de ser também desconhecido. Sua estimativa pode ser realizada utilizando técnicas como a filtragem de Kalman. Para tal, supõe-se que h se encontra dentro de um intervalo conhecido, centrado em um valor nominal h_0 e com uma amplitude de $2\Delta_h$.

2.2 Sistemas de Coordenadas para rastreo

Diversos sistemas de coordenadas (SC) são utilizados no rastreo de alvos, com destaque para sistemas de coordenadas fixo centrado na Terra (ECEF, do inglês, Earth-centered, Earth-fixed), Leste-Norte-Acima (ENU, do inglês, East-North-Up) e Azimute-Elevação-Range, (AER do inglês, Azimuth-Elevation-Range).

O sistema ENU é frequentemente escolhido para sistemas táticos que possuem movimento de sensor limitado, como é o caso de sistemas centrados em plataformas. Já o sistema ECEF é comumente utilizado em sistemas estratégicos que abrangem múltiplas plataformas [27].

A descrição do movimento do alvo é melhor e mais intuitiva para operações práticas quando operamos em um sistema de coordenadas cartesiano. No entanto, as medições são frequentemente realizadas fisicamente por sensores. Portanto, as opções para rastreo incluem o uso de coordenadas mistas, coordenadas cartesianas ou coordenadas baseadas puramente em sensores. A Figura 8 ilustra a superfície da Terra em um modelo esférico, destacando dois importantes sistemas de coordenadas amplamente utilizados, o SC ECEF e SC ENU [27], que serão detalhados nas subseções seguintes.

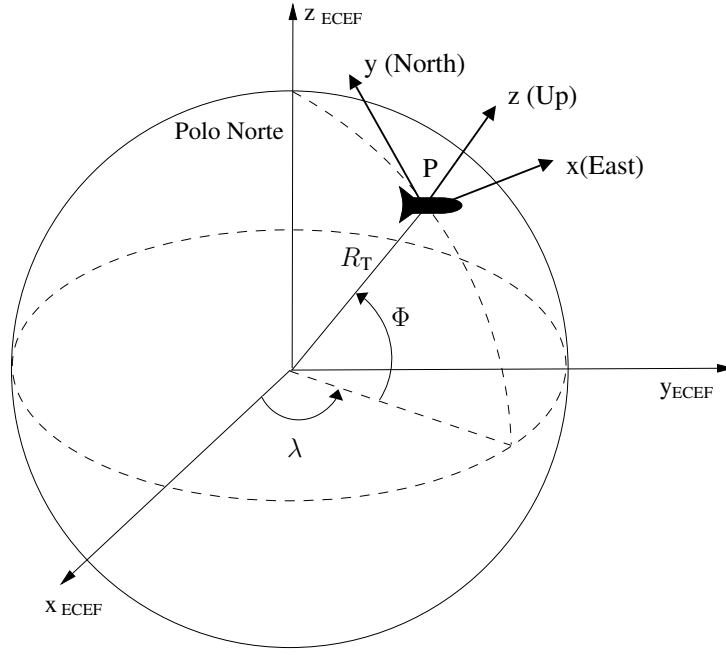


Figura 8 – Representação do Sistema de Coordenadas ECEF e ENU.

2.2.1 Sistema de Coordenadas ECEF

O Sistema de Coordenadas ECEF é um modelo geocêntrico utilizado para representar a posição de objetos na Terra. Neste sistema, o centro de coordenadas é o centro de massa da Terra, proporcionando uma referência fixa em relação à superfície terrestre. As coordenadas ECEF são expressas em três dimensões, com o eixo x_{ECEF} apontando para o Meridiano de Greenwich e o eixo z_{ECEF} alinhado com o eixo de rotação da Terra, apontando para o Polo Norte.

As equações que definem o sistema de coordenadas ECEF conforme a Figura 8, considerando o modelo esférico para a Terra, são as seguintes:

$$x_{ECEF} = R_T \cos \Phi \cos \lambda \quad (2.20)$$

$$y_{ECEF} = R_T \cos \Phi \sin \lambda \quad (2.21)$$

$$z_{ECEF} = R_T \sin \Phi \quad (2.22)$$

onde R_T representa o raio da Terra, adotado como 6371 km, Φ indica a latitude, medida a partir do equador, e λ denota a longitude, medida a partir do Meridiano de Greenwich [28].

2.2.2 Sistema de Coordenadas ENU

O Sistema de Coordenadas East-North-Up (ENU) é um sistema de coordenadas local que representa a posição em três dimensões. Este sistema define uma coordenada ao longo do eixo leste (East), uma ao longo do eixo norte (North) e uma terceira coordenada

que representa a posição vertical (Up), baseando-se no modelo elipsoidal WGS 84 (World Geodetic System 1984). O sistema ENU é particularmente aplicável ao rastreo de alvos, devido à sua praticidade em comparação com o sistema de coordenadas ECEF.

Neste sistema, as coordenadas são expressas como:

$$x(\text{East}) = \text{Distância ao longo do eixo leste} \quad (2.23)$$

$$y(\text{North}) = \text{Distância ao longo do eixo norte} \quad (2.24)$$

$$z(\text{Up}) = \text{Altura acima da superfície elipsoidal} \quad (2.25)$$

Essas coordenadas são calculadas com base em uma transformação das coordenadas geográficas Φ, λ, h (latitude, longitude e altitude) para o sistema ENU, considerando um ponto de referência local específico, que para o nosso trabalho será a posição do radar.

Para transformar as coordenadas geográficas (latitude, longitude e altitude) para o sistema de coordenadas East-North-Up (ENU), primeiro convertamos as coordenadas geográficas em coordenadas Earth-Centered, Earth-Fixed (ECEF) e, em seguida, transformamos de ECEF para ENU.

2.2.3 Sistema de Coordenadas Esférico AER

O Sistema de Coordenadas Azimuth-Elevation-Range (AER) é amplamente utilizado em sistemas de radar para a medição da posição de alvos. Os radares transmitem feixes em direções angulares específicas, com um determinado ângulo de azimute e elevação, e estimam o alcance do alvo ao longo dessa linha angular. Dessa forma, a localização de um ponto no espaço é determinada por três coordenadas esféricas no sistema AER. Na subsequente explicação das coordenadas esféricas, as coordenadas x, y e z referem-se ao sistema ENU (East-North-Up), proporcionando uma base para a conversão ou comparação entre os sistemas de coordenadas AER e ENU.

- Ângulo de azimute, θ : Este ângulo é medido a partir do semi-eixo positivo de y , conforme a convenção adotada em [29]. É importante notar que outras convenções também podem ser utilizadas, como a definição do ângulo de azimute a partir do eixo x , como discutido em [27].
- Ângulo de elevação, ϕ : Medido a partir do plano xy , o ângulo de elevação indica a inclinação vertical do feixe em relação ao solo.
- Distância, R : Esta é a distância radial da origem do sistema de coordenadas até o ponto P , que representa a posição do alvo.

A figura a seguir ilustra essas coordenadas no contexto de medições de radar, mostrando como o sistema AER é fundamental para a detecção e rastreamento de alvos.

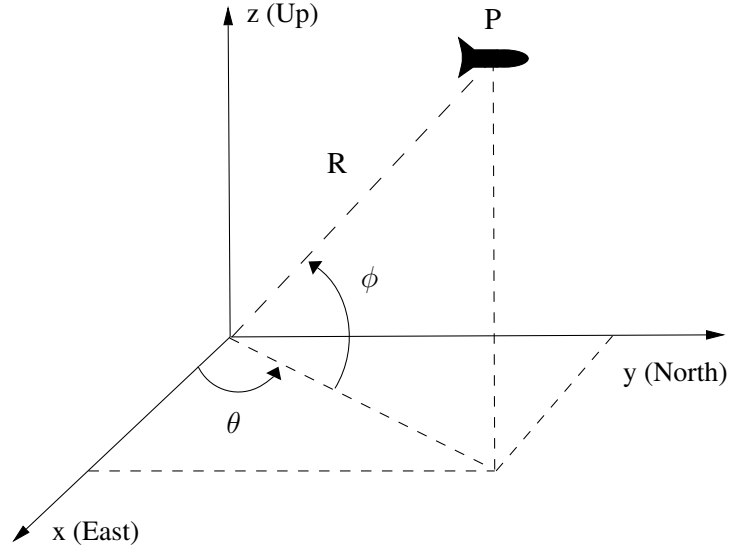


Figura 9 – Sistema de Coordenadas AER.

2.2.4 Transformação de Coordenadas AER para ENU

A transformação de coordenadas de Azimuth-Elevation-Range (AER) para East-North-Up (ENU) é um processo de duas etapas. Primeiro, as coordenadas AER são convertidas para o sistema Earth-Centered, Earth-Fixed (ECEF), levando em consideração a posição do radar em coordenadas geográficas. Em seguida, é feita a conversão de ECEF para ENU utilizando uma matriz de rotação que alinha os eixos com o sistema ENU. Este processo envolve cálculos que se baseiam em conceitos específicos da geodésia.

A conversão de ECEF para ENU é realizada através de uma matriz de rotação que alinha os eixos com o sistema ENU tal que

$$\begin{bmatrix} E \\ N \\ U \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{\text{ENU}}(P_{\text{ECEF}, P} - P_{\text{ECEF}, \text{radar}}), \quad (2.26)$$

onde $P_{\text{ECEF}, P}$ e $P_{\text{ECEF}, \text{radar}}$ são as coordenadas ECEF do projétil e do radar, respectivamente. $\mathbf{M}_{\text{ENU}}$ é a matriz de rotação definida por

$$\mathbf{M}_{\text{ENU}} = \begin{bmatrix} -\sin(\lambda_{\text{radar}}) & \cos(\lambda_{\text{radar}}) & 0 \\ -\sin(\Phi_{\text{radar}}) \cos(\lambda_{\text{radar}}) & -\sin(\Phi_{\text{radar}}) \sin(\lambda_{\text{radar}}) & \cos(\Phi_{\text{radar}}) \\ \cos(\Phi_{\text{radar}}) \cos(\lambda_{\text{radar}}) & \cos(\Phi_{\text{radar}}) \sin(\lambda_{\text{radar}}) & \sin(\Phi_{\text{radar}}) \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

Neste capítulo, foram abordados os conceitos fundamentais para a compreensão da balística externa de projéteis, focando nas dinâmicas do movimento de projéteis e na análise cinemática. Foram investigados também os sistemas de coordenadas essenciais para o rastreamento de trajetórias de projéteis, incluindo ECEF, AER e ENU, estabelecendo uma base teórica sólida para a análise de movimentos balísticos.

Concluindo este capítulo, obtém-se uma compreensão mais aprofundada da mecânica envolvida no deslocamento de projéteis, assim como dos sistemas de coordenadas que facilitam o seu rastreamento e análise. No próximo capítulo, será dado um passo adiante, aplicando esses conhecimentos teóricos ao uso prático de ferramentas avançadas como o Filtro de Kalman Estendido (EKF) e estimadores de máxima verossimilhança, focando especificamente em suas aplicações na balística externa. Esta abordagem prática permitirá uma exploração mais detalhada e técnica das metodologias de rastreamento e análise de trajetórias de projéteis.

3 FILTRO DE KALMAN E ESTIMADOR ML APLICADOS À BALÍSTICA

Neste capítulo, exploraremos dois conceitos cruciais na teoria de estimação: o Filtro de Kalman e o Estimador de Máxima Verossimilhança (ML, do inglês, *Maximum Likelihood*). O Filtro de Kalman é renomado por sua eficácia em prever o estado de sistemas dinâmicos lineares sob perturbações, enquanto o Estimador de Máxima Verossimilhança é amplamente aplicado para estimar parâmetros de modelos estatísticos. Ambos os métodos têm aplicações vastas e complementares, uma compreensão inicial de suas teorias e aplicações é essencial. Nas seções seguintes, detalharemos cada uma dessas abordagens, destacando suas características e aplicações em trajetórias balísticas.

3.1 Filtro de Kalman clássico

O Filtro de Kalman é um conjunto de equações matemáticas que formam um estimador com funções de predição e correção. Este filtro é notável por seu desempenho eficiente na minimização da covariância do erro de estimação, alcançado sob condições iniciais específicas. O filtro pode ser considerado uma ferramenta fundamental para analisar e resolver uma ampla classe de problemas de estimação [30]. Amplamente pesquisado e aplicado em diversas áreas, como na navegação autônoma ou assistida, o Filtro de Kalman ganhou destaque devido aos avanços tecnológicos em sistemas computacionais, que facilitaram sua implementação prática. Sua relativa simplicidade e robustez o tornam uma escolha popular em várias aplicações. Conforme destacado em [31], mesmo quando as condições ideais para seu uso não são totalmente atendidas, o Filtro de Kalman pode ainda ser eficaz em muitas situações práticas.

Neste capítulo será abordada a forma digital do Filtro de Kalman, uma vez que os sistemas radares modernos utilizam o processamento digital de sinais em praticamente todas as suas aplicações. Esses processadores digitais conseguem implementar algoritmos sofisticados, de forma rápida, sendo ideais para aplicações em tempo real. [29].

Partimos de um sistema dinâmico linear, no tempo discreto ¹ representado por uma equação de diferenças vetorial. Neste modelo, um ruído é somado para modelar possíveis perturbações. A Equação (3.1) representa o sistema em questão [32]. Na representação dos estados e de sistemas de tempo discreto,

¹ Sendo f_s a frequência de amostragem e $T = 1/f_s$ o período de amostragem, temos que $\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(t)|_{t=kT}$. É assumido que a discretização obedece à taxa de Nyquist, *i.e.*, f_s é maior que duas vezes a maior componente frequencial de $\mathbf{x}(t)$.

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}(k)\mathbf{u}(k) + \mathbf{v}(k) \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3.1)$$

onde:

$\mathbf{x}(k)$ é o vetor de estados n_x -dimensional;

$\mathbf{F}(k)$ é a matriz $n_x \times n_x$ de transição de estados;

$\mathbf{u}(k)$ é um vetor de entrada conhecido (pode ser uma entrada forçada, sinal de controle ou de sensor), n_u -dimensional;

$\mathbf{G}(k)$ é a matriz $n_x \times n_u$ de ganho da entrada;

$\mathbf{v}(k)$ é o vetor de ruído do processo, n_v -dimensional.

Considera-se que o ruído do processo segue uma distribuição Gaussiana de média zero. Definindo $\mathbb{E}[\cdot]$ como o valor esperado de $[\cdot]$, a matriz $\mathbf{Q}(k)$, denominada matriz de covariâncias do ruído de processo, é definida por

$$\mathbb{E}[\mathbf{v}(k)\mathbf{v}^T(k)] = \mathbf{Q}(k).$$

As medidas (ou observações) deste sistema são modeladas segundo a Equação (3.2) a seguir, denominada equação das medidas.

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{H}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{w}(k), \quad (3.2)$$

onde:

$\mathbf{z}(k)$ é o vetor de medidas de dimensão $l \times 1$;

$\mathbf{H}(k)$ é a matriz de observação de dimensão $l \times n$;

$\mathbf{w}(k)$ é o vetor do ruído de medida.

O vetor $\mathbf{w}(k)$ é também modelado por uma distribuição de probabilidade Gaussiana, de média zero. A essa sequência de variáveis aleatórias descorrelacionadas, denominada ruído branco [33], tal que:

$$\mathbb{E}[\mathbf{w}(k)] = \mathbf{0}$$

$$\mathbb{E}[\mathbf{w}(k)\mathbf{w}^T(k)] = \mathbf{R}(k)$$

$$\mathbb{E}[\mathbf{w}(k)\mathbf{w}^T(j)] = \mathbf{0} \quad \forall k \neq j$$

onde $\mathbf{R}(k)$, a matriz de covariâncias do ruído das medidas, é uma matriz diagonal.

Considerando a expressão abaixo para a média condicional do vetor de estados,

$$\hat{\mathbf{x}}(j | k) \triangleq \mathbb{E}[\mathbf{x}(j) | \mathbf{Z}^k]$$

onde,

$$\mathcal{Z}^k \triangleq \{\mathbf{z}(i), i \leq k\}$$

corresponde à sequência de observações disponíveis até o instante k , como sendo: i) uma estimativa do estado se $j = k$ (filtragem), ii) uma suavização do estado se $j < k$ ou iii) valor previsto do estado se $j > k$.

A variável a ser estimada é o estado em $k + 1$, $\hat{\mathbf{x}}(k + 1 | k + 1)$. Assim, dispondo de k medidas de $\mathbf{z}$, temos $\hat{\mathbf{x}}(k + 1 | k) \triangleq \mathbb{E}[\mathbf{x}(k + 1) | \mathcal{Z}^k]$. Aplicando o operador valor esperado na Equação (3.1), temos

$$\mathbb{E}[\mathbf{x}(k + 1) | \mathcal{Z}^k] = \mathbb{E}[\mathbf{F}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}(k)\mathbf{u}(k) + \mathbf{v}(k) | \mathcal{Z}^k]. \quad (3.3)$$

Como o ruído do processo $\mathbf{v}(k)$ é branco, com média zero, temos que

$$\hat{\mathbf{x}}(k + 1 | k) = \mathbf{F}(k)\hat{\mathbf{x}}(k | k) + \mathbf{G}(k)\mathbf{u}(k), \quad (3.4)$$

em que $\hat{\mathbf{x}}(k + 1 | k)$ é a estimativa *a priori* do vetor de estados $\mathbf{x}$ no instante $k + 1$ baseada nas k observações anteriores de $\mathbf{z}$, e $\hat{\mathbf{x}}(k | k)$ é a estimativa *a posteriori* ou corrigida do vetor $\mathbf{x}$, calculada no instante anterior. As matrizes $\mathbf{F}(k)$, $\mathbf{G}(k)$ e o vetor $\mathbf{u}(k)$ não dependem das medidas (observações) anteriores $\mathcal{Z}^k$.

De forma semelhante, baseado nas medidas ou observações, temos a estimativa *a priori* do vetor de observações $\mathbf{z}$ no instante $k + 1$, relativo às k observações anteriores, ou seja, $\hat{\mathbf{z}}(k + 1 | k) \triangleq \mathbb{E}[\mathbf{z}(k + 1) | \mathcal{Z}^k]$. O valor esperado é aplicado a Equação (3.2) tal que,

$$\mathbb{E}[\mathbf{z}(k + 1) | \mathcal{Z}^k] = \mathbb{E}[\mathbf{H}(k + 1)\mathbf{x}(k + 1) + \mathbf{w}(k + 1) | \mathcal{Z}^k]. \quad (3.5)$$

O ruído de medição $\mathbf{w}(k + 1)$ é branco, com média zero, assim

$$\hat{\mathbf{z}}(k + 1 | k) = \mathbf{H}(k + 1)\hat{\mathbf{x}}(k + 1 | k). \quad (3.6)$$

O erro de estimação, é definido como sendo $\mathbf{e}_x(j | k) \triangleq \mathbf{x}(j) - \hat{\mathbf{x}}(j | k)$, assim definimos o erro de predição de estado, utilizando as Equações (3.1) e (3.4), temos

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x(k + 1 | k) &\triangleq \mathbf{x}(k + 1) - \hat{\mathbf{x}}(k + 1 | k) \\ &= \mathbf{F}(k)\mathbf{e}_x(k | k) + \mathbf{v}(k). \end{aligned} \quad (3.7)$$

A diferença entre a Equação (3.6) e a Equação (3.2) produz o erro de previsão da medida, dado por

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_z(k+1 | k) &\triangleq \mathbf{z}(k+1) - \hat{\mathbf{z}}(k+1 | k) \\ &= \mathbf{H}(k+1)\mathbf{e}_x(k+1 | k) + \mathbf{w}(k+1)\end{aligned}\quad (3.8)$$

A matriz de covariâncias do erro de estimação *a priori* é definida como sendo

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(k+1 | k) &= \mathbb{E} \left[\mathbf{e}_x(k+1 | k) \mathbf{e}_x(k+1 | k)^T | \mathcal{Z}^k \right] \\ &= \mathbf{F}(k) \mathbb{E} \left[\mathbf{e}_x(k | k) \mathbf{e}_x(k | k)^T | \mathcal{Z}^k \right] \mathbf{F}(k)^T + \mathbb{E} \left[\mathbf{v}(k) \mathbf{v}(k)^T \right],\end{aligned}\quad (3.9)$$

que, equivalentemente, pode ser representada pela Equação (3.10).

$$\mathbf{P}(k+1 | k) = \mathbf{F}(k) \mathbf{P}(k | k) \mathbf{F}(k)^T + \mathbf{Q}(k) \quad (3.10)$$

A matriz de covariâncias do erro das medidas *a priori*, é definida conforme a Equação (3.11).

$$\begin{aligned}\mathbf{S}(k+1) &= \mathbb{E} \left[\mathbf{e}_z(k+1 | k) \mathbf{e}_z(k+1 | k)^T | \mathcal{Z}^k \right] \\ &= \mathbf{H}(k+1) \mathbf{P}(k+1 | k) \mathbf{H}(k+1)^T + \mathbf{R}(k+1)\end{aligned}\quad (3.11)$$

Já a matriz de covariâncias entre o vetor de estados e o vetor de medidas é definido como $\mathbb{E} \left[\mathbf{e}_x(k+1 | k) \mathbf{e}_z(k+1 | k)^T | \mathcal{Z}^k \right]$, que pode ser representada pela Equação (3.12). É importante observar que a covariância entre o vetor de estados e o vetor de medidas é idêntica à covariância entre os erros associados a cada um destes vetores. Isso é uma consequência direta de como as estimativas são geradas e do fato de serem baseadas em médias condicionais [32].

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[\mathbf{e}_x(k+1 | k) \mathbf{e}_z(k+1 | k)^T | \mathcal{Z}^k \right] &= \mathbb{E} \left[\mathbf{e}_x(k+1 | k) [\mathbf{H}(k+1) \mathbf{e}_x(k+1 | k) \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{w}(k+1)]^T | \mathcal{Z}^k \right] \\ &= \mathbf{P}(k+1 | k) \mathbf{H}(k+1)^T\end{aligned}\quad (3.12)$$

O ganho do Filtro de Kalman é definido como uma matriz de ponderação dado pela Equação (3.13).

$$\begin{aligned}\mathbf{K}(k+1) &\triangleq \text{cov} \left[\mathbf{x}(k+1), \mathbf{z}(k+1) | \mathcal{Z}^k \right] \mathbf{S}^{-1}(k+1) \\ &= \mathbf{P}(k+1 | k) \mathbf{H}(k+1)^T \mathbf{S}^{-1}(k+1)\end{aligned}\quad (3.13)$$

Dessa forma, a estimativa de estado atualizada tem a seguinte expressão,

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}(k+1 | k+1) &= \hat{\mathbf{x}}(k+1 | k) + \mathbf{K}(k+1) [\mathbf{z}(k+1) - \hat{\mathbf{z}}(k+1 | k)] \\ &= \hat{\mathbf{x}}(k+1 | k) + \mathbf{K}(k+1) [\mathbf{z}(k+1) - \mathbf{H}(k+1) \hat{\mathbf{x}}(k+1 | k)].\end{aligned}\quad (3.14)$$

Por fim, a covariância atualizada do estado em $k + 1$ é,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(k + 1 | k + 1) &= \mathbf{P}(k + 1 | k) - \mathbf{P}(k + 1 | k) \\ &\quad \mathbf{H}(k + 1)^T \mathbf{S}^{-1}(k + 1) \mathbf{H}(k + 1) \mathbf{P}(k + 1 | k) \\ &= [\mathbf{I} - \mathbf{K}(k + 1) \mathbf{H}(k + 1)] \mathbf{P}(k + 1 | k). \end{aligned} \quad (3.15)$$

As Equações (3.4), (3.10), (3.13), (3.14), (3.15) representam a solução recursiva para a estimação linear do Filtro de Kalman, utilizando o método do erro médio quadrático mínimo. A inicialização do algoritmo é feita conhecendo-se a estimativa do estado inicial $\hat{\mathbf{x}}(0 | 0)$ e da matriz de covariâncias $\mathbf{P}(0 | 0)$ [34]. O Algoritmo 1 sintetiza a sequência de passos para se implementar o Filtro de Kalman.

Algorithm 1 Filtro de Kalman Clássico

Require: $\hat{\mathbf{x}}(0 | 0)$ $\mathbf{P}(0 | 0)$
for $k \geq 0$ **do**
 $\hat{\mathbf{x}}(k + 1 | k) \leftarrow \mathbf{F}(k) \hat{\mathbf{x}}(k | k) + \mathbf{G}(k) \mathbf{u}(k)$ ▷ Predição do Estado
 $\mathbf{P}(k + 1 | k) \leftarrow \mathbf{F}(k) \mathbf{P}(k | k) \mathbf{F}(k)^T + \mathbf{Q}(k)$ ▷ Matriz de Covariâncias do Erro de Estimação *a priori*
 $\mathbf{K}(k + 1) \leftarrow \mathbf{P}(k + 1 | k) \mathbf{H}(k + 1)^T \mathbf{S}^{-1}(k + 1)$ ▷ Matriz de Ganho
 $\hat{\mathbf{x}}(k + 1 | k + 1) \leftarrow \hat{\mathbf{x}}(k + 1 | k) + \mathbf{K}(k + 1) [\mathbf{z}(k + 1) - \mathbf{H}(k + 1) \hat{\mathbf{x}}(k + 1 | k)]$ ▷ Correção da Estimativa
 $\mathbf{P}(k + 1 | k + 1) \leftarrow [\mathbf{I} - \mathbf{K}(k + 1) \mathbf{H}(k + 1)] \mathbf{P}(k + 1 | k)$ ▷ Matriz de Covariâncias do Erro de Estimação *a posteriori*
end for

3.2 Filtro de Kalman Estendido

Na seção anterior, exploramos as características do Filtro de Kalman clássico, notavelmente sua dependência da linearidade. Este filtro demonstra ótimo desempenho quando aplicado a modelos dinâmicos lineares e gaussianos, nos quais tanto as dinâmicas do processo quanto as estatísticas do ruído — tanto do processo quanto da medição — são precisamente conhecidas. Entretanto, é crucial reconhecer que quaisquer desvios do modelo idealizado ou incertezas nas estimativas podem impactar negativamente a eficácia do filtro, possivelmente resultando em um desempenho subótimo. Para contornar essas limitações, uma estratégia viável envolve o emprego de métodos robustos e adaptações estatísticas do filtro, visando manter sua eficiência mesmo em condições de ruído não gaussiano ou em cenários que apresentem características não lineares nas observações [35].

É essencial, portanto, estar atento às restrições inerentes ao filtro, em especial no tocante à presunção de linearidade nas interações entre as variáveis de estado e à exatidão das estimativas de estado em modelos de transição ou na definição das covariâncias.

Diante dessas considerações, torna-se pertinente a extensão dessa teoria para sistemas não lineares. Tal expansão é factível, desde que o modelo subjacente seja submetido a um processo de linearização. Este procedimento, que consiste na linearização do sistema ao redor do ponto de estimação corrente, seguida pela aplicação do Filtro de Kalman, é conhecido como Filtro de Kalman Estendido (EKF, de *Extended Kalman Filter*). Este método amplia o escopo de aplicação do filtro, permitindo sua utilização em contextos mais complexos e variados, como são observados nos problemas de rastreamento de objetos balísticos.

Especificamente, no contexto deste trabalho, o EKF é empregado para tratar desafios associados a modelos e equações não lineares inerentes às estimativas de pontos de impacto (PI) e lançamento (PL) de trajetórias balísticas. As medições obtidas por radares, frequentemente caracterizadas por complexidades não lineares, demandam uma abordagem mais avançada como o EKF. A representação do vetor de estados, ajustada para acomodar essas peculiaridades, segue a formulação descrita pela Equação (3.16). A aplicação do EKF nessas circunstâncias permite não apenas a incorporação de dados de radar, mas também a adaptação eficaz às características não lineares dos modelos balísticos, buscando uma ferramenta robusta para previsões precisas e confiáveis em cenários complexos.

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}[k, \mathbf{x}(k)] + \mathbf{v}(k) \quad (3.16)$$

Considerou-se acima que não há sinal de controle, desconsiderando o sinal de $\mathbf{u}(k)$ que estava presente na Equação (3.1). A Equação (3.2) é alterada para a Equação (3.17).

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{h}[k, \mathbf{x}(k)] + \mathbf{w}(k) \quad (3.17)$$

A função vetorial $\mathbf{f}[k, \mathbf{x}(k)]$ representa a modelagem não linear para as variáveis de estado, enquanto $\mathbf{h}[k, \mathbf{x}(k)]$ representa o mapeamento dos estados para os sinais de observação.

A obtenção de $\hat{\mathbf{x}}(k+1 | k)$ da Equação (3.16) não linear é realizada por meio da expansão em série de Taylor em torno da última estimativa de $\hat{\mathbf{x}}(k | k)$, com termos até a 1ª ou 2ª ordem para produzir o EKF de 1ª ou 2ª ordem. Usando a expansão de 1ª ordem da série de Taylor das funções $\mathbf{f}[k, \mathbf{x}(k)]$ e $\mathbf{h}[k, \mathbf{x}(k)]$ [32] :

$$\mathbf{f}[k, \mathbf{x}(k)] \approx \mathbf{f}[k, \hat{\mathbf{x}}(k | k)] + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}(k)} \right|_{\mathbf{x}(k)=\hat{\mathbf{x}}(k|k)} [(\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k | k))] \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{h}[k+1, \mathbf{x}(k+1)] \approx & \mathbf{h}[k+1, \hat{\mathbf{x}}(k+1 | k)] + \\ & \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}(k+1)} \right|_{\mathbf{x}(k+1)=\hat{\mathbf{x}}(k+1|k)} [(\mathbf{x}(k+1) - \hat{\mathbf{x}}(k+1 | k))] \end{aligned} \quad (3.19)$$

Os termos $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}(k)}$ e $\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}(k+1)}$ são os Jacobianos de $\mathbf{f}$ e $\mathbf{h}$. Ademais, são adotadas as seguintes definições

$$\mathbf{f}_x = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}(k)} \right|_{\mathbf{x}(k)=\hat{\mathbf{x}}(k|k)} \quad \text{e} \quad \mathbf{h}_x = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}(k+1)} \right|_{\mathbf{x}(k+1)=\hat{\mathbf{x}}(k+1|k)}.$$

Substituindo as Equações (3.18) e (3.19) em (3.16) e (3.17) respectivamente, chegamos às equações de processo e observações linearizadas:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}_x \mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k) + \mathbf{f}[k, \hat{\mathbf{x}}(k|k)] - \mathbf{f}_x \hat{\mathbf{x}}(k|k) \quad \text{e} \quad (3.20)$$

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{h}_x \mathbf{x}(k+1) + \mathbf{w}(k) + \mathbf{h}[k+1, \hat{\mathbf{x}}(k+1|k)] - \mathbf{h}_x \hat{\mathbf{x}}(k+1|k). \quad (3.21)$$

Através do processo de linearização das equações anteriores, é possível derivar novas expressões que descrevem o processo e as observações no contexto do Filtro de Kalman Estendido. O fluxograma da Figura 3.2 sintetiza os processos mencionados acima e o Algoritmo 2 mostra a implementação prática do EKF. Similarmente, a inicialização deste algoritmo requer o conhecimento prévio da estimativa inicial do estado $\hat{\mathbf{x}}(0|0)$ e da matriz de covariâncias $\mathbf{P}(0|0)$.

Algorithm 2 Filtro de Kalman Estendido

$\hat{\mathbf{x}}(0|0) \quad \mathbf{P}(0|0)$ ▷ Inicialização das variáveis
Require: $\mathbf{R}(k) \quad \mathbf{Q}(k) \quad \mathbf{f} \quad \mathbf{h}$ ▷ Matrizes e vetores conhecidos
for $k \geq 0$ **do**
 $\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) \leftarrow \mathbf{f}[k, \hat{\mathbf{x}}(k|k)]$ ▷ Predição do Estado
 $\mathbf{P}(k+1|k) \leftarrow \mathbf{f}_x \mathbf{P}(k|k) \mathbf{f}_x^T + \mathbf{Q}(k)$ ▷ Predição da Matriz de Covariâncias do Erro de Estimação
 $\mathbf{K}(k+1) \leftarrow \mathbf{P}(k+1|k) \mathbf{h}_x^T [\mathbf{R}(k+1) + \mathbf{h}_x \mathbf{P}(k+1|k) \mathbf{h}_x^T]^{-1}$ ▷ Ganho do filtro
 $\hat{\mathbf{x}}(k+1|k+1) \leftarrow \hat{\mathbf{x}}(k+1|k) + \mathbf{K}(k+1) [\mathbf{z}(k+1) - \mathbf{h}(k+1, \hat{\mathbf{x}}(k+1|k))]$ ▷ Correção da Estimativa
 $\mathbf{P}(k+1|k+1) \leftarrow [\mathbf{I} - \mathbf{K}(k+1) \mathbf{h}_x] \mathbf{P}(k+1|k)$ ▷ Matriz de Covariâncias do Erro de Estimação
end for

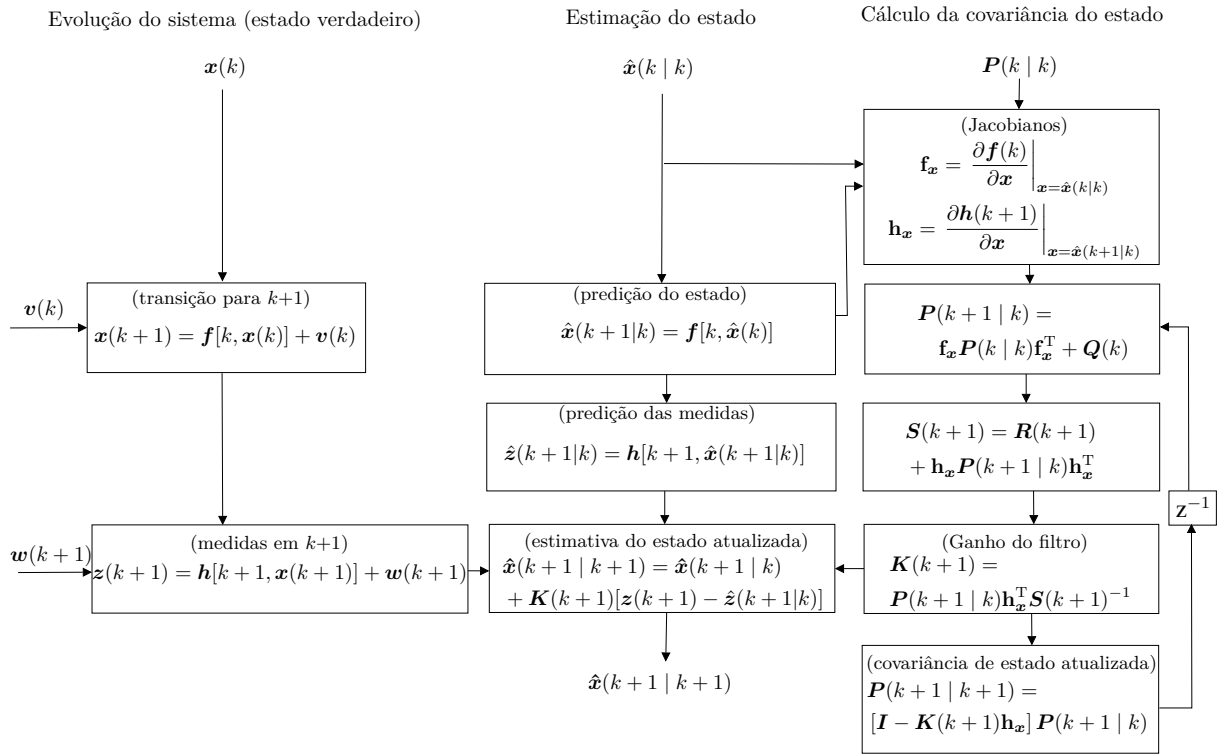


Figura 10 – Diagrama em blocos do Filtro de Kalman estendido.

3.3 Modelos Cinemáticos

Os modelos de estado cinemáticos são formulados equiparando a derivada de determinada ordem da posição a zero. Desprezando uma entrada estocástica, esses modelos podem ser descritos como um polinômio no tempo, são os *modelos polinomiais*, e os filtros de estimativa de estado associados também são chamados de filtros polinomiais [32].

Haja vista a impraticabilidade de assumir um ambiente livre de distúrbios, estes podem ser modelados como entradas aleatórias. Um método para representar isso é por um ruído branco para descrever o processo. As observações (medições) de estado são geralmente realizadas em tempo discreto. Para este trabalho, serão abordados o modelo de estado de aceleração de ruído branco, caracterizado por duas dimensões por coordenada e o modelo de estado de aceleração do processo de Wiener, apresentando três dimensões por coordenada. Geralmente, a ideia é que o movimento em cada coordenada é considerado como se não estivesse relacionado ao movimento nas outras coordenadas. Os ruídos que afetam essas diferentes coordenadas também são considerados independentes entre si, podendo ter variâncias diferentes.

3.3.1 Modelos Cinemáticos Discretos e Matriz de Covariância do Processo

A modelagem do espaço de estados pode ser realizada diretamente em tempo discreto (sem a conversão de tempo contínuo-discreto). O modelo cinemático frequentemente utilizado é explicitamente formulado em tempo discreto. O ruído do processo em tempo discreto, $\mathbf{v}(k)$, é descrito como uma sequência escalar branca, de média zero, tal que $E[v(k)v(j)] = \sigma_v^2 \delta_{k-j}$, onde $\delta_{k-j} = 1$ se $k = j$, e 0 caso contrário. Dessa forma, a equação dinâmica pode ser representada como

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{\Gamma}\mathbf{v}(k), \quad (3.22)$$

onde o ganho de ruído $\mathbf{\Gamma}$ é uma matriz cuja dimensão depende do vetor de estados $\mathbf{x}(k)$ e das medidas $\mathbf{z}(k)$. A premissa no modelo de segunda ordem é que o objeto experimenta uma aceleração constante durante cada intervalo de amostragem T , e essas acelerações não apresentam correlação de um período para o outro, resultando em uma aceleração constante por partes. Trata-se de uma suposição que nem sempre está conforme a realidade, através da seleção cuidadosa de suas magnitudes, ambos podem efetivamente representar incertezas em movimento com intervalos de tempo curtos a moderados.

I. Modelo Discreto de Aceleração de Ruído Branco

No modelo discreto de aceleração de Ruído Branco (do inglês, *discrete white noise acceleration* - DWNA), $v(k)$ representa a aceleração constante durante o k -ésimo período de amostragem (de comprimento T) tal que a mudança na velocidade durante este período é $v(k)T$, e o impacto dessa aceleração na posição é $v(k)T^2/2$. A equação de estado para o modelo constante por partes, ou aceleração discreta de ruído branco e de segunda ordem, segue a mesma forma da Equação (3.22), com o ruído do processo sendo $v(k)$ a aceleração (sequência branca de média zero). A matriz de transição é $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, o vetor de ganho do ruído multiplicado pelo ruído do processo (escalar) é $\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}T^2 & T \end{bmatrix}^T$. Sendo assim, a matriz de covariância do ruído do processo considerando o ganho é:

$$\mathbf{Q} = E[\mathbf{\Gamma}v(k)v(k)\mathbf{\Gamma}^T] = \mathbf{\Gamma}\sigma_v^2\mathbf{\Gamma}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}T^4 & \frac{1}{2}T^3 \\ \frac{1}{2}T^3 & T^2 \end{bmatrix} \sigma_v^2, \quad (3.23)$$

onde as dimensões físicas de $v(k)$ e σ_v , para este trabalho, são m/s^2 , as mesmas da aceleração. No modelo DWNA, $\mathbf{x}(k)$ inclui posição, x , e velocidade, $\dot{x}$. A matriz de transição e o vetor de ganho atualizam essas componentes com base na aceleração constante.

A seleção da variância do ruído do processo (σ_v), para o modelo em questão, deve ser aproximadamente da mesma ordem de grandeza que a aceleração máxima a_M do

instante T . Adota-se como faixa prática $\frac{1}{2}a_M \leq \sigma_v \leq a_M$. Destaca-se que um modelo de velocidade quase constante surge quando escolhemos uma pequena intensidade, no sentido de que as alterações na velocidade durante um intervalo de amostragem, que são aproximadamente $\sigma_v T$, precisam ser menores em relação à velocidade real. Para movimentos com diferentes coordenadas, considerando que a filtragem é independente entre elas, a Equação (3.23) se torna um bloco da matriz $\mathbf{Q}$ em sua forma final, sendo assim uma matriz bloco diagonal.

II. Modelo Discreto de Aceleração de Processo Wiener

O modelo de aceleração do processo discreto de Wiener (do inglês, *discrete Wiener process acceleration* - DWPA), apresenta uma equação de estado de 3ª ordem para a

Equação (3.22), tal que a matriz de transição de estados seja $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & T & \frac{1}{2}T^2 \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e

$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}T^2 & T & 1 \end{bmatrix}^T$. O ruído do processo $v(k)$ é branco e representa a aceleração durante o período de amostragem T , assumindo-se que seja uma sequência branca de média zero. A aceleração é tratada como um processo de Wiener de tempo discreto. A formulação em termos de incremento de aceleração é mais prática do que em termos da derivada de terceira ordem (conhecida como *jerk*, que representa a taxa de mudança da aceleração). A matriz de covariância do ruído do processo multiplicado pelo ganho $\mathbf{\Gamma}$ é

$$\mathbf{Q} = \mathbf{\Gamma} \sigma_v^2 \mathbf{\Gamma}' = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}T^4 & \frac{1}{2}T^3 & \frac{1}{2}T^2 \\ \frac{1}{2}T^3 & T^2 & T \\ \frac{1}{2}T^2 & T & 1 \end{bmatrix} \sigma_v^2. \quad (3.24)$$

Neste modelo, σ_v deve ser da ordem da magnitude do incremento de aceleração máxima ao longo de um período de amostragem, δa_{max} . Nas simulações, adota-se que $\frac{1}{2}\delta a_{max} \leq \sigma_v \leq \delta a_{max}$. Caso haja alteração do período de amostragem, a modelagem da variância do ruído do processo também se altera.

No modelo DWPA, $\mathbf{x}(k)$ consiste em posição, velocidade e aceleração. A matriz de transição e o vetor de ganho refletem uma dinâmica de terceira ordem, atualizando todas as três componentes.

Por fim, segundo [32], o modelo mais frequentemente empregado é o DWPA. Isso se deve ao seu mérito na facilidade com que a intensidade do ruído do processo pode ser correlacionada com as características físicas do movimento, especificamente a aceleração. Por outro lado, o modelo DWNA é mais adequado para situações que envolvem intervalos de amostragem variados.

3.3.2 Estabilidade numérica e suas implicações no Filtro de Kalman

A estabilidade numérica é um aspecto crucial tanto no Filtro de Kalman Clássico quanto no Filtro de Kalman Estendido (EKF), especialmente em situações de iterações prolongadas ou matrizes de covariância mal-condicionadas [36] e [37]. Portanto, é importante estar atento aos seguintes tópicos:

- Sensibilidade a erros de arredondamento: Em iterações prolongadas, os erros de arredondamento podem se acumular, potencialmente levando a estimativas imprecisas ou até mesmo divergentes.
- Matrizes de covariância mal-condicionadas: Matrizes de covariância que são mal-condicionadas ou próximas de singulares podem causar instabilidade numérica no Filtro de Kalman, afetando a precisão das estimativas de estado.
- Propagação de erro: A forma como os erros se propagam através das iterações pode afetar a estabilidade do filtro, especialmente em sistemas dinâmicos complexos ou em condições de mudança rápida.
- Técnicas de condicionamento: Métodos para lidar com a instabilidade numérica, como técnicas de regularização e condicionamento das matrizes, podem ser necessárias para garantir resultados confiáveis.

A estabilidade numérica mencionada acima tem implicações diretas nos modelos cinemáticos discretos e na matriz de covariância do processo utilizados no Filtro de Kalman. Nos modelos, a precisão e a confiabilidade das estimativas de trajetória são cruciais. Erros de arredondamento acumulados e a propagação de erro podem levar a desvios significativos nas trajetórias estimadas, especialmente em cenários de longa duração ou com movimentos complexos. A estabilidade numérica garante que, mesmo com várias iterações, as estimativas permaneçam consistentes e confiáveis.

Da mesma forma, o condicionamento das matrizes de covariância do processo é vital para a precisão das estimativas de estado no Filtro de Kalman. Uma matriz mal-condicionada pode distorcer a interpretação do erro de processo, levando a correções inadequadas durante o ajuste das estimativas de estado. Assim, é fundamental empregar técnicas de condicionamento e regularização para manter a robustez e a precisão do filtro. Esta abordagem é particularmente importante em sistemas dinâmicos onde as matrizes de covariância podem variar significativamente, necessitando de ajustes frequentes para manter a estabilidade numérica e a precisão das estimativas.

3.4 Estimador de Máxima Verossimilhança

O estimador ML, em seu cerne, opera sob o princípio de maximizar a probabilidade (ou verossimilhança) de que um conjunto de dados observados ocorra sob um determinado modelo [38]. No caso das trajetórias balísticas, este modelo é derivado das equações de movimento que governam o voo de um projétil. A aplicação prática deste estimador envolve o ajuste dos parâmetros do modelo balístico - tais como velocidade inicial, ângulo de lançamento e coeficientes de arrasto - de maneira que as previsões do modelo estejam em maior concordância com os dados observados, como as medições do radar.

Para os pontos de impacto, o objetivo é utilizar os dados coletados durante a fase de voo do projétil para prever com precisão onde ele atingirá o solo. Isso envolve a utilização de técnicas de otimização para ajustar os parâmetros do modelo de modo que a trajetória calculada alinhe-se com as posições e velocidades medidas ao longo do voo [39].

Por outro lado, a estimativa do ponto de lançamento apresenta um desafio adicional, dado que requer a análise retrospectiva da trajetória: determinar de onde o projétil foi lançado com base em sua trajetória subsequente. Este processo envolve o uso de métodos de retrocesso da trajetória, apoiados pela maximização da verossimilhança das medidas observadas em relação às condições iniciais estimadas [14].

A implementação dessas técnicas em um ambiente computacional, como o software MATLAB® permite a simulação e análise de diferentes Cenários de lançamento e impacto, oferecendo resultados importantes para aplicações práticas em defesa. Além disso, a flexibilidade do estimador ML para incorporar diferentes modelos de trajetória e lidar com uma variedade de incertezas e condições operacionais o torna uma ferramenta versátil e robusta para este campo de estudo.

Em suma, a introdução do estimador ML na resolução de problemas de estimação de pontos de lançamento e impacto tem o potencial de proporcionar melhorias notáveis na precisão e na confiabilidade dessas previsões.

3.4.1 Aplicação ao Problema de Balística

Reconsiderando o vetor de estados original $\mathbf{x}(k) = [x \ y \ z \ \dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]^T$, no qual cada um de seus elementos descreve as variáveis correspondentes de posição e velocidade do projétil, é apropriado realizar uma reescrita desse vetor como $\mathbf{x}_0 = [x_0 \ y_0 \ z_0 \ v_{x0} \ v_{y0} \ v_{z0}]^T$ para avaliarmos o problema de estimativa de ponto de lançamento (PL). Essa reformulação visa representar o estado inicial, que, neste contexto, engloba o ponto de lançamento do projétil (x_0, y_0, z_0) .

As medições do radar são obtidas em instantes kT e correspondem a distância $R(k)$, azimuth $\theta(k)$ e elevação $\phi(k)$, as coordenadas AER. Dado que o modelo balístico

apresentado em (2.16) é descrito em coordenadas cartesianas, a equação de medição resultante é não linear, e recaímos novamente na equação das medidas vista na Subseção 3.2, onde $\mathbf{z}(k) = \mathbf{h}[k, \mathbf{x}(k)] + \mathbf{w}(k)$. Representamos as medições do radar pelo vetor $\mathbf{z}_c(k) = \begin{bmatrix} R_c(k) & \theta_c(k) & \phi_c(k) \end{bmatrix}^T$, onde o índice c indica que as medidas são corrompidas pelo ruído $\mathbf{w}(k)$. A função de observação $\mathbf{h}[k, \mathbf{x}(k)]$ é responsável por converter as coordenadas cartesianas para o sistema de coordenadas esféricas do radar, sendo expressa da seguinte forma:

$$\mathbf{h}[k, \mathbf{x}(k)] = \begin{bmatrix} R(k) \\ \theta(k) \\ \phi(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_R(\mathbf{x}(k)) \\ h_\theta(\mathbf{x}(k)) \\ h_\phi(\mathbf{x}(k)) \end{bmatrix}, \quad (3.25)$$

onde

$$\begin{cases} h_R(\mathbf{x}(k)) = \sqrt{x(k)^2 + y(k)^2 + z(k)^2}; \\ h_\theta(\mathbf{x}(k)) = \arcsin \frac{z(k)}{\sqrt{x(k)^2 + y(k)^2 + z(k)^2}}; \\ h_\phi(\mathbf{x}(k)) = \arctg \frac{x(k)}{y(k)}. \end{cases} \quad \text{e} \quad (3.26)$$

A sequência de erros de medição $\mathbf{w}(k)$ é descrita como um ruído gaussiano branco com média zero e a matriz de covariância $\mathbf{R}(k) = \text{diag} \{ \sigma_R^2(k), \sigma_\theta^2(k), \sigma_\phi^2(k) \}$ que contém variâncias independentes para os ruídos de medição.

A função de verossimilhança é empregada para quantificar a probabilidade dos dados observados considerando as variações dos parâmetros do modelo [38]. Em termos práticos, ela examina a veracidade dos dados observados sob diversas hipóteses modeladas. O estimador de máxima verossimilhança identifica os valores dos parâmetros que maximizam a função de verossimilhança, buscando assim os ajustes mais coerentes com os dados coletados. Essa abordagem oferece uma base robusta para inferências estatísticas e suporta a tomada de decisões fundamentadas em dados, obtidos aqui, por meio do processamento de sinais radar.

A função de densidade de probabilidade das medições obtidas do radar para determinado vetor de parâmetros $\mathbf{x}_0$ pode ser escrita como [2]

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}_0 | \mathbf{z}) &= p(\mathbf{z}(1), \dots, \mathbf{z}(N); \mathbf{x}_0) \\ &= \prod_{k=1}^N \left\{ \frac{1}{\sigma_R \sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{[R_c(k) - h_R(\mathbf{x}(k))]^2}{2\sigma_R^2} \right) \right. \\ &\quad \cdot \frac{1}{\sigma_\theta \sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{[\theta_c(k) - h_\theta(\mathbf{x}(k))]^2}{2\sigma_\theta^2} \right) \\ &\quad \cdot \frac{1}{\sigma_\phi \sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{[\phi_c(k) - h_\phi(\mathbf{x}(k))]^2}{2\sigma_\phi^2} \right) \end{aligned} \quad (3.27)$$

onde N denota o número de medições obtidas pelo radar e $h_R(\mathbf{x}(k))$, $h_\theta(\mathbf{x}(k))$, $h_\phi(\mathbf{x}(k))$ são distâncias, azimute e elevação recalculados nas coordenadas do radar AER a partir de pontos de trajetória simulados com estado inicial $\mathbf{x}_0$ no instante de tempo sincronizado com a k -ésima medição do radar.

Em situações práticas, é usual trabalhar com o logaritmo da função de verossimilhança, $\ln L(\mathbf{x}_0|\mathbf{z})$, pois esta abordagem transforma produtos em somas, simplificando os cálculos. Isso é particularmente útil em modelos onde a verossimilhança é dada pelo produto de múltiplos termos. Dado que nosso objetivo é maximizar a verossimilhança ou sua forma logarítmica, optamos por minimizar o valor negativo da Log-verossimilhança. Assim, ao invés de maximizar $\ln L(\mathbf{x}_0|\mathbf{z})$, focamos em minimizar $-\ln L(\mathbf{x}_0|\mathbf{z})$. Embora esses dois procedimentos sejam equivalentes do ponto de vista matemático, a minimização da função logarítmica negativa geralmente se mostra mais prática para cálculos computacionais. Portanto, considerando $\Lambda(\mathbf{x}_0) = -\log L(\mathbf{x}_0|\mathbf{z})$, temos que

$$\begin{aligned} \Lambda(\mathbf{x}_0) = & N \left(\ln(\sigma_R \sqrt{2\pi}) + \ln(\sigma_\theta \sqrt{2\pi}) + \ln(\sigma_\phi \sqrt{2\pi}) \right) + \\ & \sum_{k=1}^N \left\{ \frac{[R_c(k) - h_R(\mathbf{x}(k))]^2}{2\sigma_R^2} + \frac{[\theta_c(k) - h_\theta(\mathbf{x}(k))]^2}{2\sigma_\theta^2} \right. \\ & \left. + \frac{[\phi_c(k) - h_\phi(\mathbf{x}(k))]^2}{2\sigma_\phi^2} \right\}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Logo, o problema recai em minimizar a expressão envolvida pelo somatório da Equação (3.28), ou seja

$$\begin{aligned} \Lambda^*(\mathbf{x}_0) = & \sum_{k=1}^N \left\{ \frac{[R_c(k) - h_R(\mathbf{x}(k))]^2}{2\sigma_R^2} + \frac{[\theta_c(k) - h_\theta(\mathbf{x}(k))]^2}{2\sigma_\theta^2} \right. \\ & \left. + \frac{[\phi_c(k) - h_\phi(\mathbf{x}(k))]^2}{2\sigma_\phi^2} \right\}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Os elementos do vetor de estado de interesse, denotado por $\mathbf{x}_0$, podem ser estimados através da aplicação do método ML, abordando o problema como uma questão de otimização, onde procuramos resolver a seguinte formulação:

$$\widehat{\mathbf{x}}_0 = \arg \min_{\mathbf{x}} (\Lambda^*(\mathbf{x}_0)). \quad (3.30)$$

A representação das medições do radar $\mathbf{z}(k)$, de forma alternativa, pode ser expressa em sistema de coordenadas ENU, onde o índice c indica novamente que as medidas são afetadas pelo ruído $\mathbf{w}(k)$. A função de observação $\mathbf{h}[k, \mathbf{x}(k)]$, é agora responsável por converter as coordenadas esféricas (AER) do radar para cartesianas no sistema ENU, seguindo os passos da Equação (2.26), ou seja,

$$\Lambda^*(\mathbf{x}_0) = \sum_{k=1}^N \left\{ \frac{[x_m(k) - h_x(\mathbf{x}(k))]^2}{2\sigma_x^2} + \frac{[y_m(k) - h_y(\mathbf{x}(k))]^2}{2\sigma_y^2} + \frac{[z_m(k) - h_z(\mathbf{x}(k))]^2}{2\sigma_z^2} \right\}, \quad (3.31)$$

onde o índice m refere-se às coordenadas cartesianas do modelo utilizado, que será comparado com as medidas corrompidas e convertidas a ENU.

No contexto de otimização, o objetivo é otimizar a estimação do vetor de estado $\widehat{\mathbf{x}}_0$ usando o método de ML. Para isso, buscamos minimizar a função custo $\Lambda^*(\mathbf{x}_0)$ para encontrar a melhor estimativa. A próxima seção foca em examinar este problema e identificar a abordagem mais eficaz para solucioná-lo.

3.4.2 Função custo do estimador ML para o problema em questão

Para compreender a solução do problema de otimização, buscou-se visualizar esta função custo e entender qual a influência de cada variável do vetor de estados $\mathbf{x}_0$. Nas Equações (3.26), as componentes $x(k)$, $y(k)$ e $z(k)$ são calculadas por meio das equações diferenciais ordinárias mencionada na Seção 2.1.2 e utilizando métodos de integração numérica como o método de Runge Kutta de 4ª ordem.

Inicialmente, foram realizadas algumas simulações para a visualização da função custo, considerando os parâmetros das componentes de velocidade fixos e realizando variações em grade para as componentes de posição x_0 , y_0 e z_0 [40]. Ao aplicar variações em grade, exploramos sistematicamente o espaço de busca, avaliando a função custo em pontos regularmente espaçados dentro de um intervalo definido para cada variável do problema, no caso $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & v_{x0} & v_{y0} & v_{z0} \end{bmatrix}^T$.

Este método é simples e fácil de implementar, mas pode ser computacionalmente intensivo, especialmente em espaços de busca de alta dimensão; além disso, pode não ser eficaz para localizar ótimos globais em funções custo complexas ou altamente não-lineares. As figuras abaixo buscam mostrar como a função custo se comporta, em dois cenários de simulação.

A Figura 11 representa os valores da função custo conforme realizamos uma busca nos eixos x , y e z . Sendo o eixo z suprimido da imagem para a visualização da superfície x , y de $\Lambda^*(\mathbf{x}_0)$. Para esse estudo inicial da função custo, foi considerado o conhecimento *a priori* de C_D^* e as componentes da velocidade $\mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} v_{x0} & v_{y0} & v_{z0} \end{bmatrix}^T$ foram constantes durante as simulações, entretanto, este Cenário, denominado Cenário I, considera erros significativos, aproximadamente 50%, em relação ao valor real da velocidade inicial $\mathbf{v}_0$.

A Figura 12 ilustra uma representação tridimensional detalhada da função $\Lambda^*(\mathbf{x}_0)$, nas mesmas circunstâncias da Figura 11, i. e., para o Cenário I. Esta visualização destaca

os três eixos cartesianos, oferecendo uma compreensão clara da estrutura espacial da função.

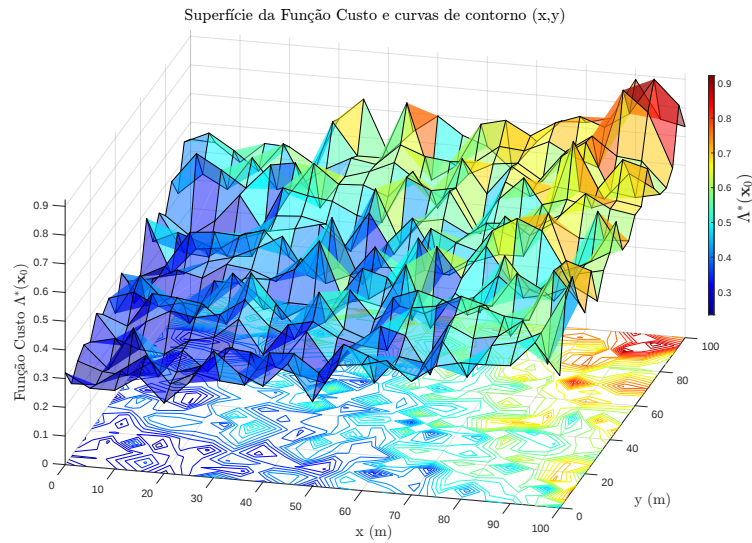


Figura 11 – Superfície da Função custo (Cenário I)

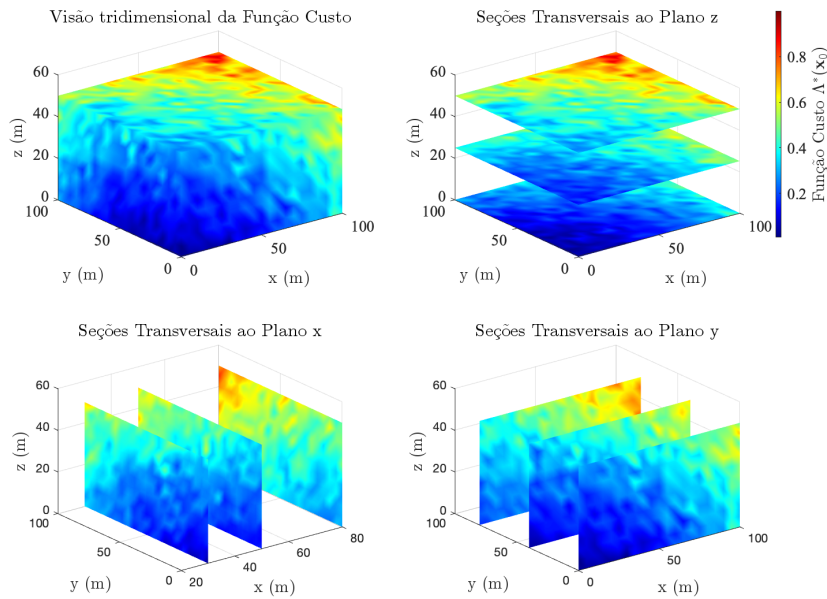


Figura 12 – Função custo tridimensional (Cenário I)

As Figura 13 e 14 representam o Cenário II. Elas também mostram os valores da função custo conforme realizamos uma busca nos eixos x , y e z . Neste caso, os erros aplicados às componentes da velocidade inicial v_0 foram menores, correspondendo a 20% do valor real de v_0 .

As diferenças observadas nas visualizações da função custo entre os dois Cenários destacam a sensibilidade do modelo aos erros nas estimativas iniciais. Esta análise não apenas reforça a compreensão do comportamento da função custo sob diferentes condições,

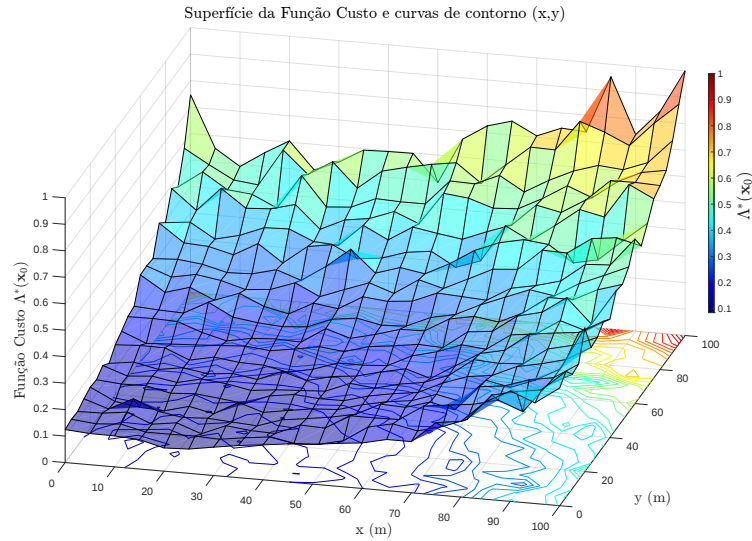


Figura 13 – Superfície da Função custo (Cenário II).

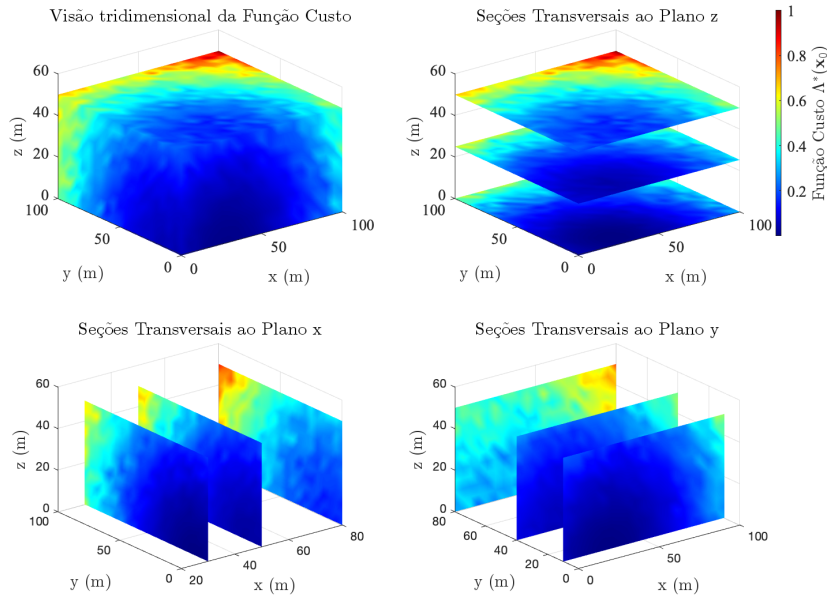


Figura 14 – Função custo tridimensional (Cenário II).

mas também sublinha a importância de uma estimativa precisa das condições iniciais para otimizar a precisão na resolução do problema de estimação.

3.4.3 Métodos de otimização

A otimização de funções custo representa um pilar fundamental em diversas aplicações científicas e de engenharia, onde o objetivo principal é encontrar configurações ótimas em um espaço de possibilidades vasto e complexo. Neste ponto, o trabalho se concentra em explorar e comparar diferentes métodos de otimização para minimizar a função custo $\Lambda^*(\mathbf{x}_0)$, enfatizando tanto a eficiência computacional quanto a precisão dos resultados obtidos.

Inicialmente, abordamos a busca em grade (*grid search*), um método exaustivo que, apesar de sua simplicidade e capacidade de fornecer uma visão abrangente do espaço de busca, frequentemente se depara com limitações significativas devido ao seu alto custo computacional e tempo de execução prolongado, que foi confirmado durante as simulações. Esta abordagem, embora útil para entender o comportamento da função custo em uma escala ampla, como realizado na seção anterior, mostrou-se impraticável para aplicações que exigem rapidez e eficiência.

Em seguida, exploramos os algoritmos genéticos, uma classe de algoritmos heurísticos inspirados na evolução biológica, que oferecem uma abordagem probabilística para a solução de problemas de otimização. Apesar de sua capacidade de escapar de mínimos locais e explorar o espaço de soluções de maneira criativa, os algoritmos genéticos ainda enfrentam desafios em termos de velocidade de convergência e precisão nas soluções finais, especialmente em Cenários com funções custo complexas [41].

Por fim, investigamos o método de Levenberg-Marquardt, uma técnica que combina o método do gradiente descendente e de Gauss-Newton para oferecer uma abordagem mais refinada e eficiente na busca pelo mínimo da função custo. Este método demonstrou não apenas uma velocidade de convergência significativamente superior em comparação aos métodos anteriores, mas também uma maior precisão, evidenciando sua adequação para problemas onde a rapidez e exatidão são cruciais [40].

A comparação destes métodos de otimização revela claramente suas vantagens e desvantagens, sublinhando a necessidade de escolher a técnica mais adequada para cada tipo específico de problema. Além disso, a análise ajuda a entender melhor as diferentes opções de otimização disponíveis na literatura.

3.4.3.1 Solução por algoritmos genéticos

Os algoritmos genéticos (AG) são uma técnica de otimização e busca inspirada na seleção natural e genética biológica. Eles são especialmente úteis em problemas complexos onde métodos tradicionais podem falhar. Esses algoritmos funcionam com uma população de indivíduos que representam soluções potenciais, expressas como cromossomos. A eficácia de cada indivíduo é medida por uma função de aptidão. Indivíduos com maior aptidão têm mais chances de serem selecionados para reprodução. Durante o processo de reprodução, ocorre o cruzamento (*crossover*) de cromossomos entre dois indivíduos, gerando descendentes, e mutações são introduzidas para manter a diversidade genética e evitar soluções subótimas [41].

3.4.3.2 Solução por algoritmo de Levenberg-Marquardt

O método de Levenberg-Marquardt é uma técnica de otimização, considerada eficaz para resolver problemas de mínimos quadrados não-lineares, o que o torna amplamente

aplicado em áreas como ajuste de curvas e aprendizado de máquina. Como aspectos fundamentais do método de Levenberg-Marquardt, temos [42]:

- **Combinação de métodos:** O método de Levenberg-Marquardt combina aspectos do método do gradiente descendente e do método de Gauss-Newton. A ideia central é aproveitar as vantagens de ambos: a robustez do gradiente descendente para estimativas iniciais distantes do mínimo e a rápida convergência do Gauss-Newton perto do mínimo.
- **Atualização de parâmetros:** A cada iteração, o método ajusta os parâmetros do modelo minimizando a soma dos quadrados dos erros (resíduos). O ajuste é feito através de uma equação que equilibra o passo do gradiente descendente e o passo do Gauss-Newton, controlado por um parâmetro λ .
- **Parâmetro lambda (λ):** Se λ é grande, o algoritmo se comporta mais como um gradiente descendente, o que é útil longe do mínimo. Se λ é pequeno, o algoritmo se aproxima do Gauss-Newton, eficaz para refinamento perto do mínimo. Ajustar λ adequadamente é crucial para o desempenho do algoritmo.

Dentre as suas características, destaca-se sua convergência rápida, dado que ao se aproximar do mínimo o método tende a convergir mais rapidamente do que puramente o gradiente descendente. É considerado mais robusto do que o método de Gauss-Newton, pois pode lidar melhor com estimativas iniciais ruins. O método também é capaz lidar com problemas de instabilidade numérica (mal condicionados).

Por fim, podemos dizer que uma das limitações do método é a sua dependência de estimativas iniciais. Embora robusto, o desempenho ainda pode depender da qualidade das estimativas iniciais dos parâmetros. Pode ser computacionalmente mais intensivo do que outros métodos, especialmente para problemas com inúmeros parâmetros. Ajustar o parâmetro λ pode ser desafiador e pode exigir um processo iterativo de tentativa e erro.

Portanto, o método de Levenberg-Marquardt é uma poderosa ferramenta de otimização, especialmente útil em problemas complexos e não-lineares de mínimos quadrados. Sua habilidade de equilibrar robustez e velocidade de convergência o torna preferido em muitos Cenários de ajuste de curvas e otimização de parâmetros, apesar de algumas limitações em termos de custo computacional e dependência das condições iniciais.

Fundamento Matemático do Método de Levenberg-Marquardt

Considerando a função $h(\mathbf{x}(k))$ e um vetor de m parâmetros $\mathbf{x}$ para um conjunto de N amostras de dados $z(k)$, busca-se reduzir ao mínimo a soma ponderada dos quadrados

dos erros (ou resíduos ponderados) entre os dados de $z(k)$ e a função de ajuste de curva $h(\mathbf{x}(k))$, ou seja [43]:

$$\begin{aligned} S(\mathbf{x}) &= \sum_{k=1}^N \left[\frac{z(k) - h(\mathbf{x}(k))}{\sigma_z} \right]^2 \\ &= (\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x}))^T \mathbf{W} (\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x})) \\ &= \mathbf{z}^T \mathbf{W} \mathbf{z} - 2\mathbf{z}^T \mathbf{W} \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{h}^T(\mathbf{x}) \mathbf{W} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (3.32)$$

onde σ_z é o erro de medição dos dados $z(k)$ e a matriz de ponderação $\mathbf{W}$ é diagonal com elementos correspondentes ao inverso de σ_z^2 .

Neste caso a função $h(\mathbf{x}(k))$ é não linear nos parâmetros do modelo $\mathbf{x}$; então, a minimização de $S(\mathbf{x})$ em relação aos parâmetros deve ser realizada de forma iterativa, conforme as Equações (3.25) e (3.26). O objetivo de cada iteração é encontrar uma perturbação $\mathbf{p}$ para os parâmetros $\mathbf{x}$ que minimize $S(\mathbf{x})$. Vemos a seguir como o algoritmo de Levenberg-Marquardt combina dois algoritmos de minimização numérica: o método do gradiente descendente e o método Gauss-Newton.

• Método do gradiente descendente

Trata-se de uma abordagem amplamente aplicável para minimização que realiza a atualização dos parâmetros na direção descendente, esta sendo contrária ao gradiente da função custo. O método de gradiente descendente demonstra boa convergência em situações onde as funções custo são de natureza simples [42]. Em contextos envolvendo múltiplos parâmetros, frequentemente os métodos baseados em gradiente descendente representam a única alternativa praticável. O gradiente da função custo da Equação (3.32) em relação aos parâmetros $\mathbf{x}$ é

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} S(\mathbf{x}) &= 2(\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x}))^T \mathbf{W} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x})) \\ &= -2(\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x}))^T \mathbf{W} \left[\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right] \\ &= -2(\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x}))^T \mathbf{W} \mathbf{J} \end{aligned} \quad (3.33)$$

sendo a matriz jacobiana $\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$ de dimensão $n \times m$ representando a sensibilidade local da função $h(\mathbf{x})$ às variações nos parâmetros $\mathbf{x}$, sua notação foi denotada como sendo $\mathbf{J}$. A atualização do parâmetro $\mathbf{x}$ que move os parâmetros na direção da descida mais íngreme é dada pela Equação (3.34), onde o escalar positivo μ determina o tamanho do passo na direção da descida mais íngreme, buscando o caminho mais direto (isto é, a direção oposta ao gradiente) para alcançar o ponto de mínimo da função que está sendo minimizada.

$$\mathbf{p}_{\text{GD}} = \mu \mathbf{J}^T \mathbf{W} (\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x})) \quad (3.34)$$

- **Método de Gauss-Newton**

O método Gauss-Newton é uma técnica destinada à minimização de uma função objetivo que consiste na soma dos quadrados. Este método parte do pressuposto de que a função objetivo pode ser aproximada por uma função quadrática nas proximidades dos parâmetros que correspondem à solução ótima [44]. Para compreender o método de Gauss-Newton, consideramos a função não-linear $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ com parâmetros do modelo somados a perturbações $\mathbf{p}$, ela pode ser aproximada localmente por meio de uma expansão em série de Taylor de primeira ordem, a qual, após manipulações matemáticas conforme [43], chega-se na seguinte expressão:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} S(\mathbf{x})(\mathbf{x} + \mathbf{p}) \approx -2(\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x}))^T \mathbf{W} \mathbf{J} + 2\mathbf{p}^T \mathbf{J}^T \mathbf{W} \mathbf{J}. \quad (3.35)$$

A hessiana do critério de ajuste é de aproximadamente $\mathbf{J}^T \mathbf{W} \mathbf{J}$. A equação resultante para a atualização de Gauss-Newton é

$$[\mathbf{J}^T \mathbf{W} \mathbf{J}] \mathbf{p}_{\text{GN}} = \mathbf{J}^T \mathbf{W} (\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x})) \quad (3.36)$$

- **Método de Levenberg-Marquardt**

O algoritmo de Levenberg-Marquardt altera adaptativamente as atualizações de parâmetros entre a atualização de gradiente descendente e a atualização de Gauss-Newton. O objetivo do método de Levenberg-Marquardt é minimizar a soma dos quadrados de funções não-lineares. Matematicamente, conforme a notação utilizada acima, isso é formulado como

$$[\mathbf{J}^T \mathbf{W} \mathbf{J} + \lambda \mathbf{I}] \mathbf{p}_{\text{LM}} = \mathbf{J}^T \mathbf{W} (\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x})). \quad (3.37)$$

Na hipótese de que o parâmetro de amortecimento λ seja pequeno, ocorre uma atualização de Gauss-Newton. Por outro lado, valores altos de λ resultam em uma atualização do gradiente descendente. O parâmetro de amortecimento λ inicialmente é grande, de modo que as primeiras atualizações sejam pequenos passos na direção da descida mais íngreme. Se alguma iteração resultar em uma aproximação pior, temos que $(S(\mathbf{x} + \mathbf{p}_{\text{LM}}) > S(\mathbf{x}))$, assim λ aumentará. Caso contrário, à medida que a solução melhora λ diminui. O método Levenberg-Marquardt se aproxima do método Gauss-Newton, e a solução normalmente acelera para o mínimo local [45].

Na relação de atualização do método, o parâmetro de amortecimento λ é dimensionado pela diagonal da hessiana $\mathbf{J}^T \mathbf{W} \mathbf{J}$ para cada parâmetro. O diagrama da Figura 15

resume os principais passos do método, aplicado conforme o algoritmo apresentado em [43].

$$\left[\mathbf{J}^T \mathbf{W} \mathbf{J} + \lambda \text{diag} \left(\mathbf{J}^T \mathbf{W} \mathbf{J} \right) \right] p_{\text{LM}} = \mathbf{J}^T \mathbf{W} (z - h(x)) \quad (3.38)$$

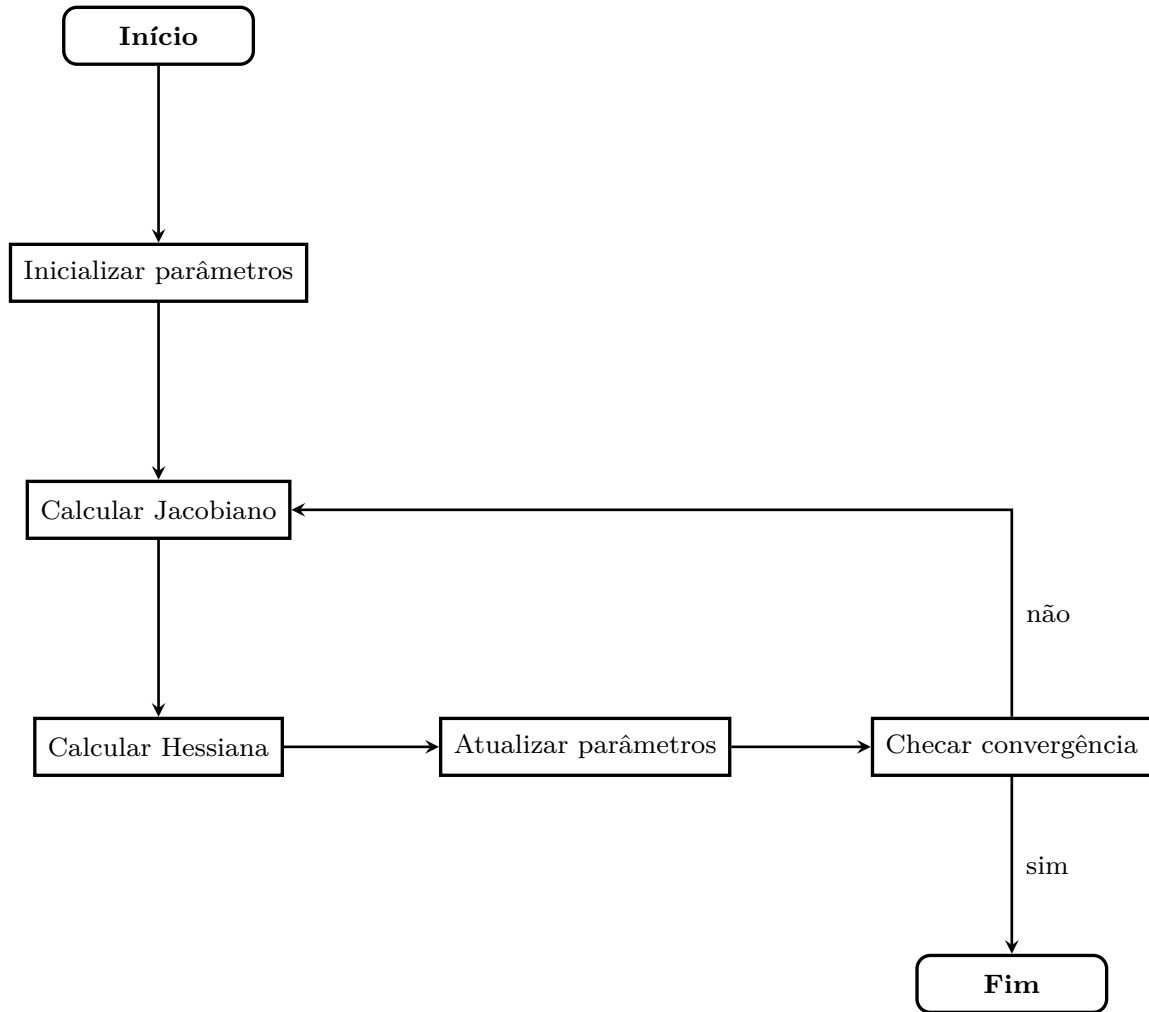


Figura 15 – Diagrama de blocos do algoritmo de LM.

Portanto, mostramos o estimador de Máxima Verossimilhança, uma ferramenta estatística fundamental para a análise de dados e modelagem de problemas. A abordagem apresentada não apenas evidencia a adaptabilidade do estimador a problemas variados, mas também destaca sua eficiência em lidar com as complexidades inerentes à análise balística. Examinamos a função custo associada ao estimador ML, ressaltando sua importância no processo de estimativa.

Além disso, discutimos dois métodos de otimização que são aplicáveis na resolução do problema, incluindo soluções por Algoritmos Genéticos e pelo método de Levenberg-Marquardt. Estes métodos não apenas fornecem um panorama das possíveis abordagens

de resolução, mas também destacam a versatilidade e a adaptabilidade para o uso do estimador ML.

No capítulo seguinte, aplicaremos os conhecimentos e as metodologias discutidas aqui para abordar e resolver problemas de estimação de pontos de lançamento e impacto.

4 METODOLOGIA ADOTADA

Neste capítulo, é apresentada a metodologia adotada para a análise e processamento dos dados de radar dos alvos balísticos. Inicialmente, o conjunto de dados experimentais é descrito, detalhando as características e especificidades das medidas de radar utilizadas no estudo. Em seguida, o Filtro de Kalman Estendido é empregado como a ferramenta central para a análise e extrapolação de trajetórias balísticas, enfatizando sua aplicabilidade e eficácia na modelagem dos coeficientes de arrasto. Diferentes modelos para estes coeficientes são abordados, discutindo suas nuances e impactos na precisão das estimativas. Além disso, as métricas de avaliação adotadas para validar as estimativas e explorar as regiões de confiança associadas são detalhadas. Por fim, os resultados numéricos obtidos são apresentados, comparando e analisando o desempenho dos diferentes modelos de coeficientes de arrasto, proporcionando uma visão abrangente sobre a estimativa do parâmetro.

4.1 Dados Experimentais

Conforme destacado anteriormente, foram obtidos dados de radar provenientes do Sistema Transportável para Rastreo de Engenheiros em Voo (STREV), uma instalação pertencente ao Centro de Avaliações do Exército (CAEx). De forma mais específica, os dados se referem a projéteis de morteiros de calibres 81 mm e 120 mm. Estas informações são oriundas de um radar de Banda C (4,0 a 8,0 GHz), que constitui uma parte essencial do sistema de rastreamento. Esses dados permitem a descrição precisa das trajetórias desses engenhos, levando em conta parâmetros como elevação, distância, azimuth e a conversão para coordenadas cartesianas. As medições dos sinais de radar foram obtidas durante vários lançamentos realizados em exercícios operativos, totalizando dez medições de morteiro 120 mm e seis medições de morteiro 81 mm. O valor dessas medidas reais reside na possibilidade de simular situações análogas às enfrentadas por radares de contrabateria.

Para exemplificar as trajetórias delineadas pelas medições do radar, apresentamos aqui alguns sinais utilizados no processo de estimação das trajetórias. O exemplo em foco é um disparo de morteiro 120 mm, realizado em exercícios operativos, onde diferentes radares foram empregados para rastrear os projéteis durante as fases de voo, registrando assim boa parte da trajetória. As medidas especificadas correspondem a um intervalo de tempo que começa 3,78s após o lançamento e termina em 29,27s.

Observou-se inicialmente que as medições realizadas pelo radar exibiam uma amostragem não uniforme, o que se deve à latência inerente ao processamento dos sinais, podendo causar variações nos intervalos de tempo entre as amostras. Assim, através da reamostragem do sinal, as medições foram alteradas para o formato uniforme. Ao

reamostrar sinais de elevação, azimute e distância de uma taxa não uniforme para uma uniforme, primeiro se aplica um filtro anti-aliasing para limitar o espectro de frequência e evitar distorções. Em seguida, o sinal é interpolado para criar uma série temporal com intervalos de amostragem regulares e uniformes. Este processo resulta em dados consistentes e adequados para análises posteriores [46]. A Figura 16 demonstra esse procedimento, evidenciando que o intervalo de amostragem apropriado é de 50 ms, condizente com a frequência de amostragem do radar de 20 Hz. A Figura 17 exibe as medições de elevação, azimute e distância, ou seja, as coordenadas AER do radar de rastreamento.

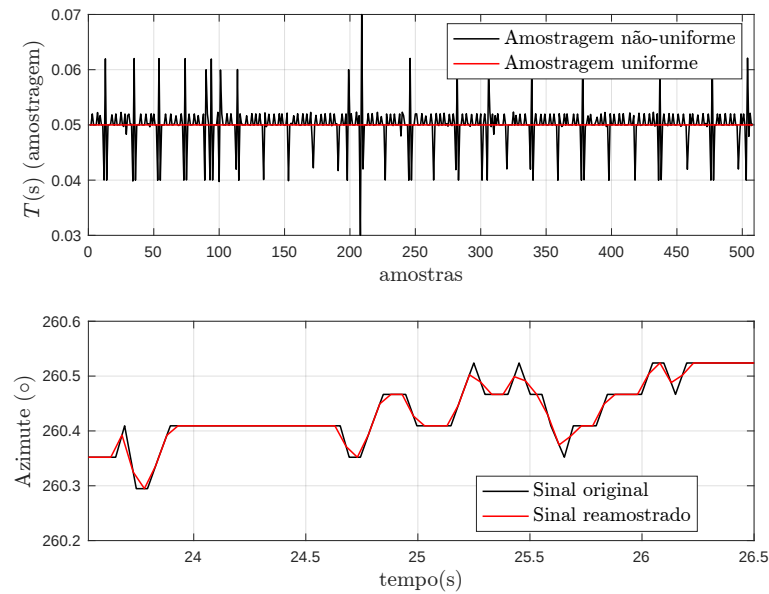


Figura 16 – Correção da amostragem do sinal radar.

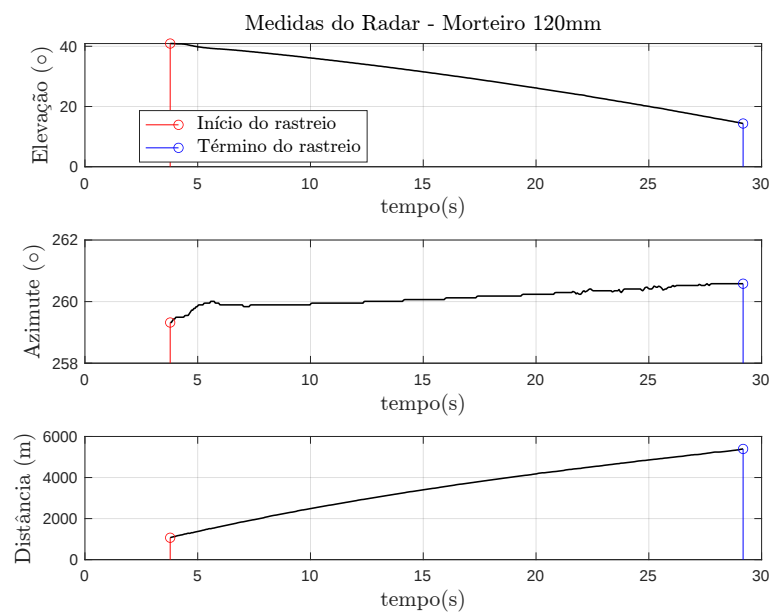


Figura 17 – Trajetória em coordenadas AER - Projétil 120mm.

O sistema de rastreamento também consegue fornecer os erros associados às medições do radar, baseando-se em sua operação ao longo de todo o intervalo de rastreamento. O erro é estimado com base na trajetória nominal do projétil, conforme informada ao sistema. A Figura 18 mostra esses erros associados as medições em coordenadas AER, para essa medição representada na figura, o desvio padrão correspondente de cada medida é $\sigma_\phi = 0,19^\circ$, $\sigma_\theta = 0,33^\circ$ e $\sigma_R = 9,52$ m.

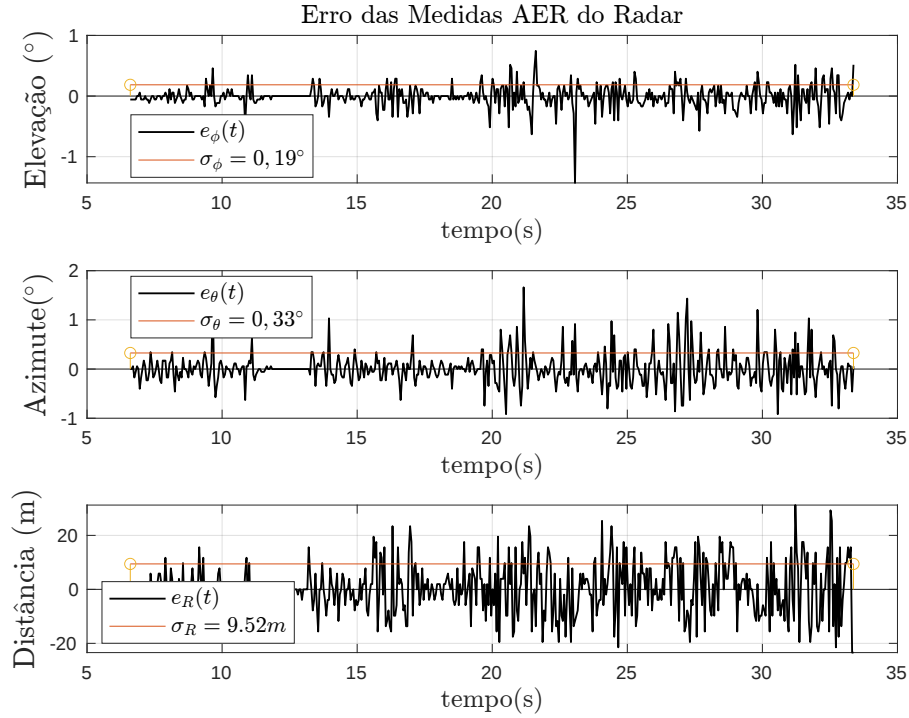


Figura 18 – Erro das medidas AER do radar.

Por fim, a figura seguinte apresenta as medições AER de duas diferentes trajetórias de projéteis, P_1 e P_2 , ilustradas à esquerda. À direita, são exibidas as respectivas coordenadas cartesianas ENU.

4.2 Filtro de Kalman Estendido e Estimação de Trajetória Balística

Os modelos dinâmicos empregados no rastreamento de trajetórias balísticas são caracterizados por sua natureza não linear. Diante disso, diversos métodos de filtros não lineares para rastreamento são propostos e extensivamente discutidos na literatura [12, 13, 47–49].

A investigação do rastreamento radar de alvos balísticos utilizando EKF, PF (do inglês, *Particle Filters*) e UKF (do inglês, *Unscented Kalman Filter*) foi explorada por [49]. Os autores destacam que o EKF oferece um equilíbrio entre custo computacional acessível e eficácia estatística, sendo provavelmente a escolha mais prática para filtragem não linear no rastreamento de alvos balísticos. Nesse contexto, o EKF se apresenta como uma solução

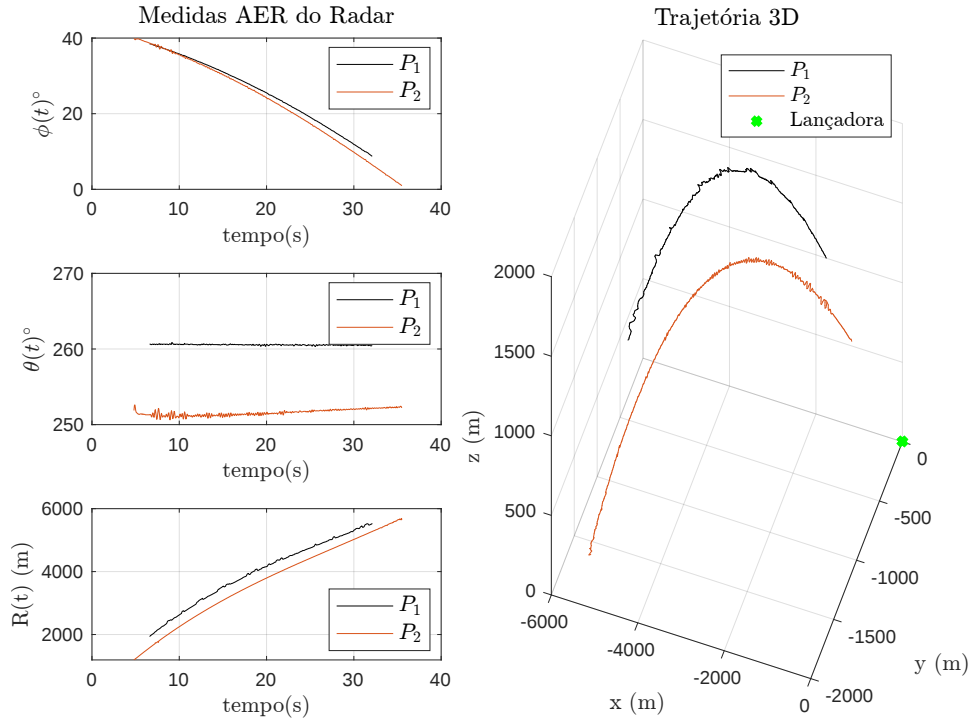


Figura 19 – Medidas do radar nos sistemas de coordenadas AER e ENU.

eficaz, adaptando-se às características específicas do modelo dinâmico balístico. Para este estudo, o modelo utilizado inicialmente para descrever a trajetória do projétil é apresentado na seguinte formulação:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2m}\rho(z)SC_D\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

onde:

m - a massa do projétil em kg

S - a área da seção transversal do projétil m^2

$\rho(z)$ - a densidade do ar kg/m^3 (função da altitude z em coordenadas ENU)

C_D - o coeficiente de arrasto (adimensional)

g - a aceleração da gravidade em m/s^2

O sobre ponto nas variáveis x , y e z corresponde a derivada em relação ao tempo, sendo assim o vetor $\mathbf{v} = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]^T$ representa as componentes da velocidade do projétil e o vetor $\mathbf{a} = [\ddot{x} \ \ddot{y} \ \ddot{z}]^T$ representa as componentes da sua aceleração.

Para simplificar a notação da Equação (4.1) e prosseguir com os cálculos que derivam o EKF, defini-se as seguintes variáveis.

$$\alpha = \frac{SC_D}{m} \quad (\text{parâmetro de arrasto}) \quad (4.2)$$

$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \quad (4.3)$$

$$P = -\frac{1}{2}\rho(z)V \quad (4.4)$$

No modelo apresentado, α representa o parâmetro de arrasto, expresso em unidades de m^2/kg , sendo fundamental para caracterizar a resistência aerodinâmica. A variável V representa o módulo da velocidade do projétil, enquanto P é uma função da densidade do ar ρ , que, por sua vez, depende da coordenada vertical z (representando a altitude no sistema de coordenadas ENU).

Para este trabalho, emprega-se o modelo exponencial para a densidade do ar, expresso por $\rho(z) = \rho_0 e^{-zh}$, onde ρ_0 representa a densidade do ar ao nível do mar, equivalente a $1,203411 \text{ kg/m}^3$, e h é o fator de decaimento da densidade, com valor de $1,0361 \times 10^{-4} (1/\text{m})$. Estes parâmetros estão conforme a *Army Standard Metro* (METRO) [16]. Com base nessa formulação, o modelo dinâmico do projétil é representado por

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = P\alpha \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Neste estudo, parte-se do pressuposto que o parâmetro de arrasto é desconhecido. Portanto, é interessante incorporar esta variável no vetor de estados, permitindo assim a estimação simultânea das posições do projétil e do parâmetro de arrasto a partir das medições de radar disponíveis até um determinado instante.

Na representação em tempo contínuo, o vetor de estados do projétil é composto por sete variáveis, expressas por $\mathbf{x}(t) = [x(t) \ y(t) \ z(t) \ \dot{x}(t) \ \dot{y}(t) \ \dot{z}(t) \ \alpha(t)]^T$. A equação diferencial que descreve o espaço de estados é formulada como $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t)] = [\dot{x}(t) \ \dot{y}(t) \ \dot{z}(t) \ \ddot{x}(t) \ \ddot{y}(t) \ \ddot{z}(t) \ \dot{\alpha}(t)]^T$.

Para discretizar $\dot{\mathbf{x}}(t)$, emprega-se a expansão em série de Taylor de segunda ordem. Dado que a série de Taylor para uma função $g(t)$ é uma representação em série de potências dada por [50]:

$$\begin{aligned} g(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(t_0)}{n!} (t - t_0)^n \\ &= g(t_0) + g'(t_0)(t - t_0) + \frac{g''(t_0)}{2!}(t - t_0)^2 + \dots \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde $g(t)$ é uma função analítica e a série de Taylor conforme expressa na Equação (4.6) é desenvolvida em torno de $t = t_0$. Portanto, admitindo que $\Delta t = t - t_0$ e considerando $\mathbf{x}(t)$ como a função no contexto da expansão, a expressão de $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t)]$ torna-se [12]:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t + \Delta t) &= \mathbf{x}(t) + \dot{\mathbf{x}}(t)\Delta t + \ddot{\mathbf{x}}(t)\frac{(\Delta t)^2}{2} + O \\
&= \mathbf{x}(t) + \mathbf{f}[\mathbf{x}(t)]\Delta t + \frac{\partial \mathbf{f}[\mathbf{x}(t)]}{\partial \mathbf{x}(t)}\mathbf{f}[\mathbf{x}(t)]\frac{(\Delta t)^2}{2} + O,
\end{aligned} \tag{4.7}$$

onde O refere-se aos termos de ordem mais alta, que serão negligenciados.

Assumindo $\Delta t \triangleq T$, onde T simboliza o período de amostragem e definindo $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(t+T)|_{t=kT}$ para a k -ésima amostra, a Equação (4.7) é reescrita no tempo discreto como

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k) + \mathbf{f}[\mathbf{x}(k)]T + \mathbf{f}_x \mathbf{f}[\mathbf{x}(k)]\frac{T^2}{2} + \mathbf{\Gamma} \mathbf{v}(k), \tag{4.8}$$

onde

$$\mathbf{f}_x = \left. \frac{\partial \mathbf{f}[\mathbf{x}(k)]}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}(k|k)} \tag{4.9}$$

representa a matriz Jacobiana e $\mathbf{\Gamma}$ denota a matriz de ganho do ruído do processo. Para um vetor de estados de sete dimensões $\mathbf{\Gamma}$ é definida por [12]

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{T^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{T^2}{2} & 0 \\ T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

O cálculo da matriz Jacobiana, denotada por $\mathbf{f}_x$, é realizado conforme a definição estabelecida na Equação (4.9). A matriz resultante, apresentada abaixo, será adaptada com as modificações necessárias de parâmetros para as modelagens discutidas na próxima seção.

$$\mathbf{f}_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} & \frac{\partial \hat{x}}{\partial z} & \frac{\partial \hat{x}}{\partial \hat{x}} & \frac{\partial \hat{x}}{\partial \hat{y}} & \frac{\partial \hat{x}}{\partial \hat{z}} & \frac{\partial \hat{x}}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} & \frac{\partial \hat{y}}{\partial z} & \frac{\partial \hat{y}}{\partial \hat{x}} & \frac{\partial \hat{y}}{\partial \hat{y}} & \frac{\partial \hat{y}}{\partial \hat{z}} & \frac{\partial \hat{y}}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial \hat{z}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{z}}{\partial y} & \frac{\partial \hat{z}}{\partial z} & \frac{\partial \hat{z}}{\partial \hat{x}} & \frac{\partial \hat{z}}{\partial \hat{y}} & \frac{\partial \hat{z}}{\partial \hat{z}} & \frac{\partial \hat{z}}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} & \frac{\partial \hat{x}}{\partial z} & \frac{\partial \hat{x}}{\partial \hat{x}} & \frac{\partial \hat{x}}{\partial \hat{y}} & \frac{\partial \hat{x}}{\partial \hat{z}} & \frac{\partial \hat{x}}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} & \frac{\partial \hat{y}}{\partial z} & \frac{\partial \hat{y}}{\partial \hat{x}} & \frac{\partial \hat{y}}{\partial \hat{y}} & \frac{\partial \hat{y}}{\partial \hat{z}} & \frac{\partial \hat{y}}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial \hat{z}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{z}}{\partial y} & \frac{\partial \hat{z}}{\partial z} & \frac{\partial \hat{z}}{\partial \hat{x}} & \frac{\partial \hat{z}}{\partial \hat{y}} & \frac{\partial \hat{z}}{\partial \hat{z}} & \frac{\partial \hat{z}}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial y} & \frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial z} & \frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial \hat{x}} & \frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial \hat{y}} & \frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial \hat{z}} & \frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial \alpha} \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

4.3 Modelagens para o parâmetro de arrasto

Conforme à revisão bibliográfica realizada, verifica-se que diferentes modelagens para o parâmetro de arrasto são propostas e submetidas a análises na literatura. Este estudo empreende um exame comparativo dessas abordagens, com o intuito de identificar a metodologia que propicia a mais acurada estimativa do parâmetro de arrasto para a base de dados reais que dispomos. A estimativa deste parâmetro é de vital importância, por influenciar diretamente na precisão das previsões das trajetórias balísticas, constituindo, portanto, um elemento fundamental para a eficácia do modelo de rastreamento descrito na Equação (4.5).

Baseando-se na modelagem da Equação (4.5), observa-se que as três primeiras linhas da matriz apresentada na Equação (4.11) são constituídas essencialmente por elementos nulos e unitários. Especificamente, os elementos f_{14} , f_{25} e f_{36} , correspondendo respectivamente às derivadas parciais $\frac{\partial \dot{x}}{\partial x}$, $\frac{\partial \dot{y}}{\partial y}$ e $\frac{\partial \dot{z}}{\partial z}$, assumem o valor de 1. A presença de elementos nulos nestas linhas da matriz é uma consequência direta da invariância das variáveis de estado $\dot{x}$, $\dot{y}$ e $\dot{z}$ em relação às demais componentes do vetor de estados $\mathbf{x}(k)$. Assim sendo, a estrutura da matriz Jacobiana, conforme delineada na Equação (4.11), é caracterizada por:

$$\mathbf{f}_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} & f_{45} & f_{46} & f_{47} \\ f_{51} & f_{52} & f_{53} & f_{54} & f_{55} & f_{56} & f_{57} \\ f_{61} & f_{62} & f_{63} & f_{64} & f_{65} & f_{66} & f_{67} \\ f_{71} & f_{72} & f_{73} & f_{74} & f_{75} & f_{76} & f_{77} \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

O cálculo dos elementos não nulos de $\mathbf{f}_x$ são realizados conforme o Apêndice A, que fornece a seguinte matriz jacobiana.

$$\mathbf{f}_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & f_{43} & f_{44} & f_{45} & f_{46} & f_{47} \\ 0 & 0 & f_{53} & f_{54} & f_{55} & f_{56} & f_{57} \\ 0 & 0 & f_{63} & f_{64} & f_{65} & f_{66} & f_{67} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Considerando a sub-matriz denominada de $\mathbf{f}'_x$, como sendo

$$\mathbf{f}'_x = \begin{bmatrix} f_{43} & f_{44} & f_{45} & f_{46} & f_{47} \\ f_{53} & f_{54} & f_{55} & f_{56} & f_{57} \\ f_{63} & f_{64} & f_{65} & f_{66} & f_{67} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

sua forma final é

$$\mathbf{f}'_x = \begin{bmatrix} -\dot{x}\alpha Ph & \alpha P \left(1 + \left(\frac{\dot{x}}{V}\right)^2\right) & \dot{x}\dot{y}\alpha \frac{P}{V^2} & \dot{x}\dot{z}\alpha \frac{P}{V^2} & \dot{x}P \\ -\dot{y}\alpha Ph & \dot{x}\dot{y}\alpha \frac{P}{V^2} & \alpha P \left(1 + \left(\frac{\dot{y}}{V}\right)^2\right) & \dot{y}\dot{z}\alpha \frac{P}{V^2} & \dot{y}P \\ -\dot{z}\alpha Ph & \dot{x}\dot{z}\alpha \frac{P}{V^2} & \dot{y}\dot{z}\alpha \frac{P}{V^2} & \alpha P \left(1 + \left(\frac{\dot{z}}{V}\right)^2\right) & \dot{z}P \end{bmatrix}. \quad (4.15)$$

4.3.1 Modelo com o parâmetro balístico β -EKF

O coeficiente balístico é uma métrica que reflete a eficiência de um projétil em superar a resistência aerodinâmica, estabelecendo uma relação inversamente proporcional com o coeficiente de arrasto. Portanto, ele se apresenta como um parâmetro viável para modelar a sétima variável de estado do sistema. Em analogia ao tratamento dado ao parâmetro de arrasto, introduz-se agora uma nova variável denominada parâmetro balístico, simbolizada por β . Ao aplicar as equações balísticas tradicionais na propagação de covariâncias e na realização de atualizações de medição no filtro, emergem desafios associados à estabilidade numérica. Conforme observado pelos autores de [13], este fenômeno decorre das discrepâncias nas ordens de grandeza entre o parâmetro de arrasto α , tipicamente da ordem de 10^{-3} (kg/m²), e os vetores de velocidade $\mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) & \dot{y}(t) & \dot{z}(t) \end{bmatrix}^T$, na ordem de 10^2 (m/s), bem como o vetor de posições $\mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} x(t) & y(t) & z(t) \end{bmatrix}^T$, aproximadamente 10^4 (m). Em decorrência disso, adota-se o parâmetro balístico $\beta = 1/\alpha$ como a sétima variável de estado. Considerando as Equações (4.2), (4.3) e (4.4), o modelo dinâmico é reformulado, contribuindo para aumentar a linearidade do sistema modelado.

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \frac{P}{\beta} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Desta forma, o vetor de estados do projétil pode ser representado por $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) & y(t) & z(t) & \dot{x}(t) & \dot{y}(t) & \dot{z}(t) & \beta(t) \end{bmatrix}^T$. A equação diferencial que define o espaço de estados é dada por $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t)] = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) & \dot{y}(t) & \dot{z}(t) & \ddot{x}(t) & \ddot{y}(t) & \ddot{z}(t) & \dot{\beta}(t) \end{bmatrix}^T$. Para o cálculo da matriz Jacobiana $\mathbf{f}_x$, é aplicada a mesma definição conforme a Equação (4.9). Neste caso, temos que a matriz $\mathbf{f}_x$ é novamente representada pela Equação (4.13) e os elementos da Equação (4.14) são

$$\mathbf{f}'_x = \begin{bmatrix} -\dot{x}\frac{P}{\beta}h & \frac{P}{\beta}\left(1 + \left(\frac{\dot{x}}{V}\right)^2\right) & \dot{x}\dot{y}\frac{P}{\beta V^2} & \dot{x}\dot{z}\frac{P}{\beta V^2} & \frac{-\dot{x}P}{\beta^2} \\ -\dot{y}\frac{P}{\beta}h & \dot{x}\dot{y}\frac{P}{\beta V^2} & \frac{P}{\beta}\left(1 + \left(\frac{\dot{y}}{V}\right)^2\right) & \dot{y}\dot{z}\frac{P}{\beta V^2} & \frac{-\dot{y}P}{\beta^2} \\ -\dot{z}\frac{P}{\beta}h & \dot{x}\dot{z}\frac{P}{\beta V^2} & \dot{y}\dot{z}\frac{P}{\beta V^2} & \frac{P}{\beta}\left(1 + \left(\frac{\dot{z}}{V}\right)^2\right) & \frac{-\dot{z}P}{\beta^2} \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

4.3.2 Modelo com conhecimento *a priori* do parâmetro balístico β_0 -EKF

Outra modelagem do parâmetro balístico é proposta em [13], segundo os autores, busca-se evitar problemas de linearização do método apresentado na Seção 4.3.1. O método propõe trabalhar com a variável de estado $\Delta\beta$ nas equações dinâmicas, usando a seguinte mudança de variável:

$$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\beta_0} - \frac{1}{\beta_0^2}\Delta\beta. \quad (4.18)$$

O vetor de estados do projétil é $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) & y(t) & z(t) & \dot{x}(t) & \dot{y}(t) & \dot{z}(t) & \Delta\beta(t) \end{bmatrix}^T$ e a equação diferencial que define o espaço de estados é dada por $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t)] = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) & \dot{y}(t) & \dot{z}(t) & \ddot{x}(t) & \ddot{y}(t) & \ddot{z}(t) & \dot{\Delta\beta}(t) \end{bmatrix}^T$. A equação dinâmica passa a ser

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} &= -\frac{\rho}{2} \left(\frac{1}{\beta_0} - \frac{1}{\beta_0^2}\Delta\beta \right) V \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} \\ &= \frac{P}{\beta_0} \left(1 - \frac{\Delta\beta}{\beta_0} \right) \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Para o cálculo da matriz Jacobiana $\mathbf{f}_x$, é novamente aplicada a definição conforme a Equação (4.9). Neste caso, temos que a matriz é representada pela Equação (4.13) e os elementos da Equação (4.14) são calculados no Apêndice B.

Para a matriz $\mathbf{f}'_x$, convencionou-se que $\mathbf{f}'_x = \begin{bmatrix} \mathbf{F}'_x & \mathbf{F}''_x \end{bmatrix}$, onde as matrizes $\mathbf{F}'_x$ e $\mathbf{F}''_x$ são calculadas de forma semelhante ao que foi feito na matriz $\mathbf{f}'_x$ na Subseção 4.3.1, tal como segue.

$$\mathbf{F}'_x = \begin{bmatrix} -\dot{x}\frac{Ph}{\beta_0}\left(1 - \frac{\Delta\beta}{\beta_0}\right) & \frac{1}{\beta_0}\left(1 - \frac{\Delta\beta}{\beta_0}\right)\left(P + \frac{\dot{x}^2}{V^2}P\right) & \frac{\dot{x}\dot{y}}{\beta_0}\left(1 - \frac{\Delta\beta}{\beta_0}\right)\frac{P}{V^2} \\ -\frac{\dot{y}Ph}{\beta_0}\left(1 - \frac{\Delta\beta}{\beta_0}\right) & \dot{x}\frac{\dot{y}P}{\beta_0 V^2}\left(1 - \frac{\Delta\beta}{\beta_0}\right) & \frac{P}{\beta_0}\left(1 + \frac{\dot{y}^2}{V^2}\right)\left(1 - \frac{\Delta\beta}{\beta_0}\right) \\ -\frac{\dot{z}Ph}{\beta_0}\left(1 - \frac{\Delta\beta}{\beta_0}\right) & \frac{\dot{x}\dot{z}P}{\beta_0 V^2}\left(1 - \frac{\Delta\beta}{\beta_0}\right) & \frac{\dot{y}\dot{z}P}{\beta_0 V^2}\left(1 - \frac{\Delta\beta}{\beta_0}\right) \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

$$\mathbf{F}''_x = \begin{bmatrix} \frac{\dot{x}\dot{z}}{\beta_0}\left(1 - \frac{\Delta\beta}{\beta_0}\right)\frac{P}{V^2} & -\frac{\dot{x}P}{\beta_0^2} \\ \frac{\dot{y}\dot{z}P}{\beta_0 V^2}\left(1 - \frac{\Delta\beta}{\beta_0}\right) & -\frac{\dot{y}P}{\beta_0^2} \\ \frac{P}{\beta_0}\left(1 + \frac{\dot{z}^2}{V^2}\right)\left(1 - \frac{\Delta\beta}{\beta_0}\right) & -\frac{\dot{z}P}{\beta_0^2} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

4.3.3 Modelo Exponencial e-EKF

Conforme descrito por [51], em determinados cenários, estamos interessados em estimar a trajetória de uma classe específica de objetos, neste caso projéteis. O parâmetro α é modelado a partir do desvio do coeficiente de arrasto *a priori*, seja por um coeficiente nominal ou medida inicial deste parâmetro. Para este modelo, cria-se uma variável para o sétimo estado definida como $d = \ln(\frac{\alpha}{\alpha_0})$, onde α_0 corresponde ao valor do parâmetro de arrasto *a priori*. Este parâmetro passa a ser descrito como $\alpha = \alpha_0 e^d$ sendo substituído na Equação 4.22.

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = P\alpha_0 e^d \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Os passos seguintes, são os mesmos realizados anteriormente. O vetor de estados do projétil é representado por sete variáveis de estado, sendo:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) & y(t) & z(t) & \dot{x}(t) & \dot{y}(t) & \dot{z}(t) & d(t) \end{bmatrix}^T.$$

A variável de estado d é considerada uma variável *estática*, uma vez que se trata do desvio relativo a um valor *nominal*. Portanto, a equação diferencial que define o espaço de estados é $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t)] = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) & \dot{y}(t) & \dot{z}(t) & \ddot{x}(t) & \ddot{y}(t) & \ddot{z}(t) & 0 \end{bmatrix}^T$.

Para o cálculo da matriz Jacobiana $\mathbf{f}_x$, é novamente aplicada a definição conforme a Equação (4.9). Neste caso, temos que a matriz é representada pela Equação (4.13) e os elementos da Equação (4.14) são calculados no Apêndice C.

A matriz Jacobiana $\mathbf{f}_x$ é representada da mesma forma que as Equações (4.13) e (4.14). Para a matriz $\mathbf{f}'_x$, convencionou-se que $\mathbf{f}'_x = \begin{bmatrix} \mathbf{F}'_x & \mathbf{F}''_x \end{bmatrix}$, onde as matrizes $\mathbf{F}'_x$ e $\mathbf{F}''_x$ são calculadas de forma semelhante ao que foi feito na matriz $\mathbf{f}'_x$ na Subseção 4.3.1, tal como segue.

$$\mathbf{F}'_x = \begin{bmatrix} -\dot{x}\alpha_0 e^d P h & \alpha_0 e^d P \left(1 + \left(\frac{\dot{x}}{V}\right)^2\right) & \dot{x}\dot{y}\alpha_0 e^d \frac{P}{V^2} \\ -\dot{y}\alpha_0 e^d P h & \dot{x}\dot{y}\alpha_0 e^d \frac{P}{V^2} & \alpha_0 e^d P \left(1 + \left(\frac{\dot{y}}{V}\right)^2\right) \\ -\dot{z}\alpha_0 e^d P h & \dot{x}\dot{z}\alpha_0 e^d \frac{P}{V^2} & \dot{y}\dot{z}\alpha_0 e^d \frac{P}{V^2} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

$$\mathbf{F}''_x = \begin{bmatrix} \dot{x}\dot{z}\alpha_0 e^d \frac{P}{V^2} & \dot{x}P\alpha_0 e^d \\ \dot{y}\dot{z}\alpha_0 e^d \frac{P}{V^2} & \dot{y}P\alpha_0 e^d \\ \alpha_0 e^d P \left(1 + \left(\frac{\dot{z}}{V}\right)^2\right) & \dot{z}P\alpha_0 e^d \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

4.3.4 Modelo com a densidade do ar na variável de estado γ -EKF

Outra abordagem de modelagem, encontrada na literatura, propõe a introdução de uma nova variável na sétima posição do vetor de estado. Esta variável é definida como $\gamma \triangleq \alpha\rho(z)$, onde $\rho(z)$ segue um modelo exponencial local, conforme descrito na Equação (2.2). As dinâmicas deste modelo são detalhadas nas Equações (4.26) e (4.27).

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\gamma\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\gamma V \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

De forma semelhante ao que foi apresentado anteriormente, o vetor de estados é $\mathbf{x}(t) = [x(t) \ y(t) \ z(t) \ \dot{x}(t) \ \dot{y}(t) \ \dot{z}(t) \ \gamma(t)]^T$. A equação diferencial que define o espaço de estados é dada por $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t)] = [\dot{x}(t) \ \dot{y}(t) \ \dot{z}(t) \ \ddot{x}(t) \ \ddot{y}(t) \ \ddot{z}(t) \ \dot{\gamma}(t)]^T$. A nova variável de estado, omitindo o índice de tempo t , apresenta a seguinte equação dinâmica.

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\alpha\rho(z)) = \frac{\partial}{\partial t}(\alpha\rho_0 e^{-hz}) = \alpha\rho_0 e^{-hz}(-h\dot{z}) \\ &= -\gamma h\dot{z} \end{aligned} \quad (4.27)$$

Para o cálculo da matriz Jacobiana $\mathbf{f}_x$, é aplicada a definição conforme a Equação (4.9), dada por:

$$\mathbf{f}_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial z} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{z}} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial z} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{z}} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial \dot{z}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{z}} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial \ddot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \ddot{x}}{\partial y} & \frac{\partial \ddot{x}}{\partial z} & \frac{\partial \ddot{x}}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial \ddot{x}}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial \ddot{x}}{\partial \dot{z}} & \frac{\partial \ddot{x}}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial \ddot{y}}{\partial x} & \frac{\partial \ddot{y}}{\partial y} & \frac{\partial \ddot{y}}{\partial z} & \frac{\partial \ddot{y}}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial \ddot{y}}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial \ddot{y}}{\partial \dot{z}} & \frac{\partial \ddot{y}}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial \ddot{z}}{\partial x} & \frac{\partial \ddot{z}}{\partial y} & \frac{\partial \ddot{z}}{\partial z} & \frac{\partial \ddot{z}}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial \ddot{z}}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial \ddot{z}}{\partial \dot{z}} & \frac{\partial \ddot{z}}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial z} & \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial \dot{z}} & \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial \gamma} \end{bmatrix}. \quad (4.28)$$

Da mesma forma, as primeiras 3 linhas da matriz são compostas por zeros e uns, sendo os elementos f_{14} , f_{25} e f_{36} correspondentes as parcelas $\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{z}} = 1$. Os elementos nulos ocorrem devido à invariância das variáveis do espaço de estados $\dot{x}$, $\dot{y}$ e $\dot{z}$ em relação a qualquer outra componente do vetor de estados $\mathbf{x}(k)$. Dessa forma, a matriz Jacobiana da Equação (4.28) torna-se:

$$\mathbf{f}_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} & f_{45} & f_{46} & f_{47} \\ f_{51} & f_{52} & f_{53} & f_{54} & f_{55} & f_{56} & f_{57} \\ f_{61} & f_{62} & f_{63} & f_{64} & f_{65} & f_{66} & f_{67} \\ f_{71} & f_{72} & f_{73} & f_{74} & f_{75} & f_{76} & f_{77} \end{bmatrix}. \quad (4.29)$$

O cálculo destes elementos são realizados conforme o Apêndice D.

A matriz Jacobiana $\mathbf{f}_x$ fica da seguinte forma.

$$\mathbf{f}_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & f_{43} & f_{44} & f_{45} & f_{46} & f_{47} \\ 0 & 0 & f_{53} & f_{54} & f_{55} & f_{56} & f_{57} \\ 0 & 0 & f_{63} & f_{64} & f_{65} & f_{66} & f_{67} \\ 0 & 0 & f_{73} & 0 & 0 & f_{76} & f_{77} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

Considerando, agora, a matriz denominada de $\mathbf{f}'_x$, como sendo:

$$\mathbf{f}'_x = \begin{bmatrix} f_{43} & f_{44} & f_{45} & f_{46} & f_{47} \\ f_{53} & f_{54} & f_{55} & f_{56} & f_{57} \\ f_{63} & f_{64} & f_{65} & f_{66} & f_{67} \\ f_{73} & 0 & 0 & f_{76} & f_{77} \end{bmatrix}, \quad (4.31)$$

sua forma final é dada por

$$\mathbf{f}'_x = \begin{bmatrix} \frac{\dot{x}Vh\gamma}{2} & -\frac{\gamma}{2}\left(V + \frac{\dot{x}^2}{V}\right) & -\frac{\gamma\dot{x}\dot{y}}{2V} & -\frac{\gamma\dot{x}\dot{z}}{2V} & -\frac{V\dot{x}}{2} \\ \frac{\dot{y}Vh\gamma}{2} & -\frac{\gamma\dot{y}\dot{x}}{2V} & -\frac{\gamma}{2}\left(V + \frac{\dot{y}^2}{V}\right) & -\frac{\gamma\dot{y}\dot{z}}{2V} & -\frac{V\dot{y}}{2} \\ \frac{\dot{z}Vh\gamma}{2} & -\frac{\gamma\dot{z}\dot{x}}{2V} & -\frac{\gamma\dot{z}\dot{y}}{2V} & -\frac{\gamma}{2}\left(V + \frac{\dot{z}^2}{V}\right) & -\frac{V\dot{z}}{2} \\ h^2\dot{z}\gamma & 0 & 0 & -\gamma h & -h\dot{z} \end{bmatrix}. \quad (4.32)$$

4.4 Inicialização das Variáveis de Estado

A teoria presente em [32] aborda a questão da inicialização das variáveis de estado mediante um modelo Bayesiano. Este modelo nos diz que os estados iniciais são variáveis aleatórias, presumidas como distribuídas normalmente, caracterizadas por uma média previamente conhecida. Os estados iniciais são então definidos pela média $\hat{\mathbf{x}}(0 | 0)$ e pela matriz de covariância $\mathbf{P}(0 | 0)$, configurando um modelo Gaussiano expresso por

$\mathbf{x}(0) \sim \mathcal{N}[\hat{\mathbf{x}}(0 | 0), \mathbf{P}(0 | 0)]$. Em um ambiente de simulação, é possível gerar o estado inicial utilizando um gerador de variáveis aleatórias que siga este modelo.

Contudo, apesar de esta metodologia estar alinhada com as premissas fundamentais do filtro, sua aplicabilidade pode ser limitada devido às variações inerentes a cada inicialização em sequências de simulações.

Uma abordagem alternativa, que se revela mais pragmática, envolve a definição de um estado inicial específico, considerado como o estado verdadeiro, seguida pela geração da estimativa inicial conforme a expressão $\hat{\mathbf{x}}(0) \sim \mathcal{N}[\mathbf{x}(0 | 0), \mathbf{P}(0 | 0)]$. Esta abordagem pode ser elucidada pelas expressões matemáticas abaixo, nas quais $\mathbf{x}(0)$ e a estimativa inicial $\hat{\mathbf{x}}(0 | 0)$ são intercambiáveis, mantendo a característica da distribuição normal.

$$\begin{aligned} p[\mathbf{x}(0) | \hat{\mathbf{x}}(0 | 0)] &= \mathcal{N}[\mathbf{x}(0); \hat{\mathbf{x}}(0 | 0), \mathbf{P}(0 | 0)] \\ &= \mathcal{N}[\hat{\mathbf{x}}(0 | 0); \mathbf{x}(0), \mathbf{P}(0 | 0)] \\ &= p[\hat{\mathbf{x}}(0 | 0) | \mathbf{x}(0)] \end{aligned}$$

4.4.1 Implementação prática para rastreo

A abordagem prática para a inicialização das variáveis de estado, utilizando um vetor de estados $\mathbf{x}(k) = [\mathbf{p}(k) \quad \dot{\mathbf{p}}(k)]^T$, onde $\mathbf{p}(k) = [x(k) \quad y(k) \quad z(k)]^T$ e $\dot{\mathbf{p}}(k) = [\dot{x}(k) \quad \dot{y}(k) \quad \dot{z}(k)]^T$, correspondem ao vetor das posições e das velocidades, respectivamente. Supondo que temos medições diretas da posição, podemos utilizar esses dados por meio do seguinte modelo das equações das medidas:

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{p}(k) + \mathbf{w}(k). \quad (4.33)$$

Com este modelo, as medições diretas da posição são utilizadas para estimar tanto a posição quanto a velocidade no vetor de estado. A inicialização das variáveis de estado $\mathbf{x}(0)$ pode então ser feita com base nas primeiras medições disponíveis de posição, enquanto a velocidade inicial pode ser estimada ou definida com base em suposições, ou informações adicionais disponíveis.

Os valores *verdadeiros* da posição geram ruídos de medição tais que $\mathbf{w}(k) \sim \mathcal{N}[0, \mathbf{R}]$. Dado um intervalo de amostragem T e representando a estimativa inicial da posição como sendo $\hat{\mathbf{p}}(0|0) = \mathbf{z}(0)$, o vetor inicial de velocidades pode ser estimado como:

$$\hat{\dot{\mathbf{p}}}(0|0) = \frac{\mathbf{z}(1) - \mathbf{z}(0)}{T}. \quad (4.34)$$

A matriz de covariância inicial do erro da estimativa é representada abaixo, desprezando o ruído do processo.

$$\mathbf{P}(0 | 0) = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{R}/T \\ \mathbf{R}/T & 2\mathbf{R}/T^2 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

A abordagem acima é conhecida como *diferença de dois pontos* e pode fornecer a consistência necessária para a inicialização do filtro para atualizações no instante $k = 2$. Nas situações onde são observadas variações intensas nas medições, este ajuste polinomial de primeira ordem utilizando as duas primeiras medições pode apresentar imprecisão. Para esses casos é indicado utilizar mais de duas amostras da medição, isso exigirá a aplicação de um ajuste polinomial de ordem superior, como alternativa, tem-se o *método dos mínimos quadrados* [32].

Nas simulações com várias rodadas (*Monte Carlo*), é necessário seguir o mesmo procedimento de inicialização, com a devida atualização dos ruídos gerados (mantendo a independência) em cada execução, conforme $\mathbf{w}(k) \sim \mathcal{N}[0, \mathbf{R}]$. Usar repetidamente as mesmas condições iniciais em simulações de *Monte Carlo* resultará em estimativas parciais.

Em certos cenários, a depender da aplicação, a velocidade calculada usando um método de diferença de dois pontos pode exceder significativamente um limite de velocidades possíveis, ou mais prováveis. Em tais situações, é mais apropriado definir a posição inicial com base em uma única observação e considerar a estimativa de velocidade inicial como sendo zero, descrita como *inicialização de um ponto*. O desvio padrão associado pode ser definido, por exemplo, na metade da velocidade máxima conhecida [32]. A adoção dessa abordagem introduzirá viés nas simulações de *Monte Carlo* para este cenário específico, já que o erro de velocidade inicial permanece fixo em vez de ser aleatório e possuir média zero.

4.5 Extrapolação da trajetória balística e ganho de Kalman

O ganho de Kalman, representado por $\mathbf{K}$, pode ser compreendido como um coeficiente de ponderação. Ele desempenha o papel crucial de determinar a proporção da inovação que será incorporada na atualização do estado estimado. Em termos simples, quando $\mathbf{K}$ é pequeno ou nulo, pouco ou nenhuma correção é aplicada à estimativa, enquanto, inversamente, quando $\mathbf{K}$ é alto, a inovação é utilizada para corrigir o estado estimado. Em essência, o ganho de Kalman age como um mecanismo de equilíbrio, permitindo que o filtro ajuste a influência da informação proveniente das medições e do modelo dinâmico, adaptando-se à confiança relativa em cada fonte de informação durante o processo de atualização do estado.

Analisando a equação de atualização da estimativa no EKF, representada pela Equação (3.14), é possível empregar o filtro em malha aberta (do inglês, *open-loop*), garantindo que o ganho de Kalman seja sempre nulo após algumas estimativas. A intenção

é extrapolar as estimativas e considerar as últimas atualizações da matriz de covariância da estimativa $\mathbf{P}(k+1 | k+1)$, utilizando o filtro para prever as variáveis de estado. A ideia de operar o EKF em malha aberta, definindo o ganho de Kalman como nulo na ausência de novas medições, é conceitualmente correta. Essa abordagem é usada para continuar a estimativa de estado com base no modelo de sistema quando novas medições não estão disponíveis. É importante notar que essa abordagem pode aumentar a incerteza da estimativa ao longo do tempo, visto que não há correções sendo aplicadas para ajustar possíveis erros no modelo.

4.6 Métricas de Avaliação da Estimativa

É interessante observar que no contexto da estimativa de um parâmetro constante, a consistência de um estimador (um estimador estático) é caracterizada pela convergência da estimativa e o seu valor real. Isso indica um acúmulo contínuo de informações (no sentido de Fisher) sobre o parâmetro, diminuindo eventualmente a incerteza sobre seu verdadeiro valor para zero.

O problema de estimação do estado de um sistema dinâmico mostra que, geralmente, não existe convergência desta estimativa. Neste caso, toma-se como parâmetro a estimativa atualizada do estado, denotada como $\mathbf{x}(k|k)$ e a matriz de covariância da estimativa, $\mathbf{P}(k|k)$, disponível. Nas situações de divergência observável, onde o filtro ocasionalmente produz erros de estimativa de estado com altas magnitudes, esses erros podem decorrer de fatores como erros de modelagem, erros numéricos e até mesmo erros de programação.

A avaliação prática da consistência envolve normalmente a caracterização estatística de distúrbios via momentos de até segunda ordem. Posteriormente, espera-se que o filtro resultante forneça momentos aproximados de primeira e segunda ordem do estado. Assim, duas condições podem ser avaliadas e satisfeitas pelo filtro, mesmo diante de algumas aproximações:

$$(i) \quad \mathbb{E}[\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k | k)] \triangleq \mathbb{E}[\tilde{\mathbf{x}}(k | k)] = 0$$

$$(ii) \quad \mathbb{E}[(\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k | k))(\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k | k))^T] \triangleq \mathbb{E}[\tilde{\mathbf{x}}(k | k)\tilde{\mathbf{x}}(k | k)^T] = \mathbf{P}(k | k)$$

A condição (i) é a propriedade mais sem viés da estimativa [32] (ou seja, erro de estimativa nulo), enquanto (ii) é o requisito correspondente para a covariância, ou seja, que o MSE atual (lado esquerdo) corresponda à covariância calculada pelo filtro (lado direito). Como critérios de consistência de um filtro, pode-se dizer que o mais importante para testes em simulações seja considerar a expressão $\tilde{\mathbf{x}}(k | k) = \mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k | k)$ e definir o erro quadrático da estimativa normalizado do estado (do inglês, *normalized estimation error squared*—NEES), como sendo:

$$\epsilon(k) = \tilde{\mathbf{x}}(k | k)^T \mathbf{P}^{-1}(k | k) \tilde{\mathbf{x}}(k | k). \quad (4.36)$$

Supondo que o filtro seja consistente, $\epsilon(k)$ segue uma distribuição qui-quadrado com n_x graus de liberdade, onde n_x é a dimensão de $\mathbf{x}(k)$. O teste correspondente consiste em verificar se $\mathbb{E}[\epsilon(k)] = n_x$.

4.6.1 O Limite Inferior de Cramer-Rao e a Matriz de Informações de Fisher

Conforme o Limite Inferior de Cramér-Rao (do inglês, *Cramér-Rao Lower Bound* ou CRLB), o erro quadrático médio associado à estimativa de um parâmetro não pode ser menor que o limite específico determinado pela função de verossimilhança [38]. O CRLB também pode ser visto como uma métrica teórica que estabelece a variância mínima para um estimador não enviesado em um problema de estimação de parâmetros. Ele representa a precisão mínima alcançável na estimativa de um parâmetro em um modelo estatístico. Além disso, cabe ressaltar que o CRLB assume uma relevância particular na avaliação da eficácia dos estimadores, desempenhando um papel de suma importância no contexto da comparação entre diferentes algoritmos de estimação. Este indicador é fundamental para aferir a eficiência de estimadores em termos da variação mínima teoricamente possível de suas estimativas, constituindo-se, portanto, em um critério robusto e estatisticamente fundamentado na análise comparativa de metodologias de estimação [52].

A Matriz de Informação de Fisher $\mathbf{J}$ (do inglês, *Fisher Information Matrix* -FIM) é utilizada na teoria de estimação para avaliar a precisão da estimativa de parâmetros em um modelo. Ela busca mensurar as informações presentes nos dados sobre os parâmetros deste modelo e é utilizada no cálculo do CRLB. De forma geral, uma informação de Fisher mais alta indica uma menor variância do estimador, resultando em uma maior precisão da estimativa.

A relação entre a FIM e o CRLB é estabelecida por meio de uma desigualdade fundamental na teoria da estimativa de parâmetros. No caso da estimativa de um parâmetro escalar, não aleatório e unidimensional $\mathbf{x}(k)$, cujo estimador sem viés é $\hat{\mathbf{x}}(k | k)$, a variância possui o seguinte limite [32],

$$\mathbb{E} \left[[\hat{\mathbf{x}}(k | k) - \mathbf{x}(k)]^2 \right] \geq \mathbf{J}^{-1}. \quad (4.37)$$

A variável $\mathbf{J}$ corresponde a informação de Fisher, sendo calculada como,

$$\mathbf{J} \triangleq - \mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 \ln \Lambda_k(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} \right] \bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(k)} = \mathbb{E} \left\{ \left[\frac{\partial \ln \Lambda_k(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right]^2 \right\} \bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(k)} \quad (4.38)$$

onde $\Lambda_k(\mathbf{x})$ corresponde a função de verossimilhança do parâmetro, ou seja, a densidade de probabilidade conjuntada das medidas. Essa *pdf* representa a medida de quão provável

o valor do parâmetro é, dada uma observação (medida). Se a variância do estimador for igual ao CRLB, então tal estimador é chamado de estimador eficiente. Para os casos multidimensionais, as Equações (4.37) e (4.38) ficam no seguinte formato,

$$\mathbb{E} \left[[\hat{\mathbf{x}}(k | k) - \mathbf{x}(k)] [\hat{\mathbf{x}}(k | k) - \mathbf{x}(k)]^T \right] \geq \mathbf{J}^{-1} \quad (4.39)$$

e

$$\mathbf{J} \triangleq - \mathbb{E} \left[\nabla_{\mathbf{x}} \nabla_{\mathbf{x}}^T \ln \Lambda(\mathbf{x}) \right] \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(k)} = \mathbb{E} \left[[\nabla_{\mathbf{x}} \ln \Lambda(\mathbf{x})] [\nabla_{\mathbf{x}} \ln \Lambda(\mathbf{x})]^T \right] \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(k)}, \quad (4.40)$$

onde $\mathbf{x}(k)$ é o valor verdadeiro do parâmetro vetorial.

Em essência, a informação de Fisher ajuda a quantificar quanta informação útil os dados fornecem para a estimativa de parâmetros.

Supondo que o erro de estimativa de parâmetros $\tilde{\mathbf{x}}(k | k)$ seja aproximadamente uma distribuição Gaussiana, com covariância dada pelo CRLB, ou seja, $\mathbf{P} \triangleq \mathbb{E} \left[\tilde{\mathbf{x}}(k | k) \tilde{\mathbf{x}}(k | k)^T \right] = \mathbf{J}^{-1}$. A matriz $\mathbf{J}$ é suposta inversível, de posto n_x (a dimensão de $\mathbf{x}$) e sua inversa $\mathbf{J}^{-1}$ é uma matriz de covariância positiva definida. Voltando a Equação (4.36), o NEES é representado por uma distribuição qui-quadrado com n_x graus de liberdade, ou seja, $\epsilon_x \sim \chi_{n_x}^2$.

Por fim, o NEES pode ser usado em simulações para verificar se o estimador é eficiente, ou seja, os erros correspondem à covariância dada pelo CRLB, sendo esse procedimento uma verificação de eficiência do estimador. Neste trabalho, adotou-se o conceito proposto pelos autores de [32], onde definimos a variável b tal que $\mathbf{P}\{\epsilon_x \leq b^2\} = 1 - B$, sendo B uma probabilidade pequena. Para que o estimador seja considerado eficiente, o NEES deve ser menor que b^2 com alta probabilidade $(1 - B)$.

4.6.2 Região de Confiança para a estimativa de PI e PL

Considerando um estimador eficiente e conhecendo-se o parâmetro verdadeiro $\mathbf{x}(k)$, é possível obter uma “distância máxima” (quadrática) dele até o parâmetro estimado, sendo denominada como a norma quadrática do erro. Caso $\mathbf{x}(k)$ seja desconhecido e somente $\hat{\mathbf{x}}(k | k)$ for conhecido, pode-se dizer que $\mathbf{x}(k | k)$ deve pertencer ao conjunto de possíveis pontos da estimativa de $\hat{\mathbf{x}}(k | k)$, determinado novamente pela expressão $\mathbf{P}\{\epsilon_x \leq b^2\} = 1 - B$. Esta última corresponde à região de confiança para o parâmetro verdadeiro. A região de confiança para o parâmetro $\mathbf{x}(k | k)$ é delimitada pelos pontos na superfície elíptica:

$$[\mathbf{x}(k | k) - \hat{\mathbf{x}}(k | k)]^T \mathbf{P}^{-1}(k | k) [\mathbf{x}(k | k) - \hat{\mathbf{x}}(k | k)] = b^2. \quad (4.41)$$

A matriz de covariância $\mathbf{P}$ é positiva definida e a superfície elíptica possui semieixos que são b vezes as raízes quadradas dos autovalores de $\mathbf{P}$. Tal região é o elipsoide de

concentração de probabilidade, obtida cortando as caudas da densidade gaussiana multivariada. O lado esquerdo da Equação (4.41) é conhecido como distância de *Mahalanobis* e pode ser entendida como sendo uma medida de quão longe um ponto de dados está de um conjunto de dados multivariado médio, considerando a covariância entre as variáveis. Ela é uma generalização da distância euclidiana e é útil em estatística e análise multivariada [53].

Para a aplicação neste trabalho, onde o foco é na estimativa do ponto de impacto e lançamento de um objeto balístico, foram adotados cálculos semelhantes aos autores de [54], considerando as coordenadas cartesianas (x, y, z) e que o ponto de impacto correspondente é representado pelo plano (x, y) . Nas simulações, a elipse com região de probabilidade de 99% χ^2 (qui-quadrado) foi utilizada tanto para os pontos de impacto verdadeiro quanto para os pontos de lançamento. A formulação apresentada a seguir foi utilizada para o ponto de impacto, e o mesmo raciocínio se aplica ao ponto de lançamento. Isto é representado pela seguinte equação:

$$\begin{bmatrix} x_{PI} - \hat{x}_{PI} \\ y_{PI} - \hat{y}_{PI} \end{bmatrix}^T \mathbf{P}_E^{-1} \begin{bmatrix} x_{PI} - \hat{x}_{PI} \\ y_{PI} - \hat{y}_{PI} \end{bmatrix} = \chi_2^2(99\%), \quad (4.42)$$

onde (x_{PI}, y_{PI}) é o ponto de impacto verdadeiro, $(\hat{x}_{PI}, \hat{y}_{PI})$ é o ponto de impacto estimado e $\mathbf{P}_E$ é a matriz de covariância da estimativa correspondente. A constante tal que $\chi_2^2(99\%)$ indica o ponto de 99% na função de distribuição acumulada qui-quadrada com dois graus de liberdade.

Na prática, desconhecendo o ponto de impacto verdadeiro, a elipse está centrada no ponto de impacto estimado e o que pode ser verificado é se o ponto de impacto verdadeiro (se disponível) está dentro da elipse de probabilidade de 99%. Nas simulações de Monte Carlo, é possível avaliar o inverso, ou seja, se os pontos de impacto estimados caem na elipse centrada no ponto de impacto verdadeiro.

A outra abordagem empregada neste trabalho e mostrada pelos autores de [55], é utilizar a região formada por um círculo, chamado pelos autores de “círculo de incertezas”. Essa região pode ser utilizada como uma “zona de aviso” para indicar uma maior probabilidade de impacto do objeto balístico. O método é mostrado pela expressão abaixo,

$$\begin{bmatrix} x_{PI} - \hat{x}_{PI} \\ y_{PI} - \hat{y}_{PI} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda_{\max} & 0 \\ 0 & \lambda_{\max} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_{PI} - \hat{x}_{PI} \\ y_{PI} - \hat{y}_{PI} \end{bmatrix} = \chi_2^2(99\%), \quad (4.43)$$

onde $\lambda_{\max}$ é o autovalor máximo da matriz de covariância $\mathbf{P}_E$. O círculo de incertezas da Equação (4.43) pode ser usado como a região de probabilidade para o verdadeiro ponto de impacto, centrado no ponto de impacto estimado.

4.6.3 Análise de Erros Absolutos

A avaliação do desempenho de um filtro em problemas de estimação é fundamentalmente ligada à análise de erros absolutos. Neste contexto, o erro RMS é uma métrica, que avalia a precisão do filtro em condições reais de operação. Assim, os erros associados à posição e à velocidade, incluindo tanto as componentes individuais quanto o módulo da velocidade podem ser avaliados. Tais análises são cruciais para compreender a eficácia global do filtro em diversas situações práticas.

Em cada problema, há um interesse primordial no desempenho absoluto de um filtro, avaliado através dos erros RMS, sendo ainda mais significativos. A análise pode ser feita para os erros de posição, velocidade e módulo da velocidade, tal como em

$$\text{RMS}(\tilde{\psi}) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{\psi}_i^2}. \quad (4.44)$$

No caso de um vetor de três dimensões das posições $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$, o erro RMS é

$$\text{RMS}(\tilde{\mathbf{x}}) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\tilde{x}_i^2 + \tilde{y}_i^2 + \tilde{z}_i^2)} \quad (4.45)$$

Os erros de estimativa percentuais podem ser calculados para cada componente da trajetória de um projétil como sendo

$$e(\%) = \left| \frac{\text{valor}_{\text{real}} - \text{valor}_{\text{estimado}}}{\text{valor}_{\text{real}}} \right| \times 100. \quad (4.46)$$

4.6.4 Erro de localização do alvo

O erro de localização do alvo (do inglês, *Target Location Error*, TLE), é um parâmetro crítico nas operações balísticas e de rastreamento de alvos. O TLE refere-se à discrepância entre a posição estimada de um alvo e sua posição real ou medida. Por exemplo, um TLE de 80% indica haver uma confiança de 80% de que o erro de localização real está contido em uma faixa de erro especificada. Esta métrica é fundamental na avaliação da precisão de sistemas de rastreamento e de projéteis balísticos, onde a precisão é muitas vezes uma questão fundamental [56].

Considerando um cenário prático, se um sistema de rastreamento de alvos reporta um TLE a 80% com raio $R_{TLE} = 5$ m, isto implica que há 80% de probabilidade de que a localização real do alvo esteja a no máximo 5 metros da localização estimada. Em contextos balísticos, onde o cálculo preciso do ponto de impacto é essencial, o TLE serve como um indicador crucial da eficácia do sistema. Isso é particularmente relevante em operações militares e em testes de sistemas de defesa, onde a capacidade de prever e interceptar um alvo com precisão pode ser uma tarefa crítica.

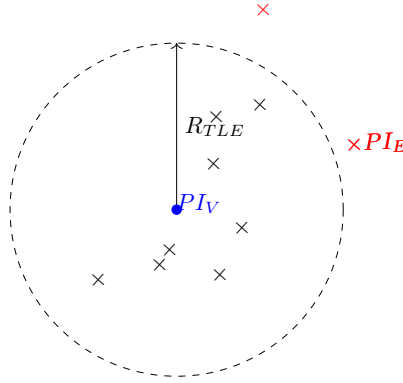


Figura 20 – Exemplo de TLE 80%

4.7 Simulações para a estimativa do parâmetro de arrasto

Simulações de trajetórias balísticas foram realizadas utilizando o método de Runge-Kutta de 4ª ordem (RK4). Este método de integração é reconhecido na análise numérica por sua capacidade de resolver equações diferenciais ordinárias (EDO) de forma precisa e robusta, conforme discutido em [50].

O algoritmo RK4, detalhado em [1], foi empregado para calcular as posições x , y e z . No contexto deste trabalho, o passo de integração h foi equivalente ao período de amostragem T das medições. Os parâmetros iniciais para o método incluem o coeficiente de arrasto e as condições iniciais, as quais são encapsuladas no vetor de estados inicial $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & v_{x0} & v_{y0} & v_{z0} \end{bmatrix}^T$.

O RK4 aborda a solução de uma EDO expressa por $y' = f(x, y)$, partindo de uma condição inicial definida. Este processo iterativo avança a solução em incrementos discretos ao longo do intervalo de integração. Em cada etapa, o RK4 computa quatro inclinações, ou derivadas, e aplica uma média ponderada destas para estimar o valor subsequente da solução. As etapas do RK4 utilizado são descritas na Equação (4.47).

$$\begin{cases} k_1 = f(\lambda(n)) \\ k_2 = f\left(\lambda(n) + \frac{T}{2}k_1\right) \\ k_3 = f\left(\lambda(n) + \frac{T}{4}(k_1 + k_2)\right) \\ k_4 = f(\lambda(n) - T(k_2 + 2k_3)) \\ \lambda(n+1) = \lambda(n) + \frac{1}{6}T(k_1 + 4k_3 + k_4) \end{cases} \quad (4.47)$$

As trajetórias balísticas representadas no espaço cartesiano pelo vetor $[x(k) \ y(k) \ z(k)]^T$, foram empregadas como dados de entrada no Filtro de Kalman Estendido, constituindo o vetor de medições $\mathbf{z}(k)$.

O objetivo destas simulações foi avaliar o desempenho das diferentes modelagens para o EKF apresentadas na seção 4.3, com especial atenção para a estimativa do coeficiente de arrasto. A representação do vetor de medições é

$$\mathbf{z}(k) = \begin{bmatrix} x_m(k) \\ y_m(k) \\ z_m(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(k) + w_1(k) \\ y(k) + w_2(k) \\ z(k) + w_3(k) \end{bmatrix} = \mathbf{H}\mathbf{x}(k) + \mathbf{w}(k), \quad (4.48)$$

onde a matriz $\mathbf{H}$ é dada por $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 4} \end{bmatrix}$, $\mathbf{I}_3$ representa uma matriz identidade de ordem 3, enquanto $\mathbf{0}_{3 \times 4}$ representa uma matriz com todos os elementos nulos e de ordem 3×4 . O ruído adicionado ao vetor $[x(k) \ y(k) \ z(k)]^T$ é Gaussiano e branco, tal que $\mathbb{E}[\mathbf{w}(k)\mathbf{w}^T(k)] = \mathbf{R}(k)$, a matriz de covariância correspondente às medidas.

O ruído do processo $\mathbf{v}(k)$ representa os erros de discretização e incertezas de modelagem nas equações de movimento, considera-se que esses erros são Gaussianos, média zero e brancos, ou seja, $\mathbb{E}[\mathbf{v}(k)\mathbf{v}(k)^T] = \overline{\mathbf{Q}}(k)$. A matriz $\overline{\mathbf{Q}}(k)$ é a matriz de covariância do processo $\mathbf{v}(k)$, sendo uma matriz diagonal com elementos q_x, q_y, q_z e q_M (índice M representa a sigla do modelo a ser utilizado). Tais elementos são as componentes x, y, z e γ da densidade espectral de potência do processo aleatório $\mathbf{v}(k)$, assumidos constantes ao longo do tempo. Considerando a matriz de ganho do ruído $\mathbf{\Gamma}$,

$$\mathbf{Q}(k) = \mathbb{E}[\mathbf{\Gamma}\mathbf{v}(k)\mathbf{v}(k)^T\mathbf{\Gamma}^T] = \mathbf{\Gamma}\overline{\mathbf{Q}}(k)\mathbf{\Gamma}^T \quad (4.49)$$

onde

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2}\mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ T\mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

e

$$\overline{\mathbf{Q}}(k) = \begin{bmatrix} q_x & & & \\ & q_y & & \\ & & q_z & \\ & & & q_M \end{bmatrix}. \quad (4.51)$$

As simulações foram realizadas com os valores das densidades espectrais para o ruído do processo conforme a Tabela 2. Nelas também constam as densidades representadas na sétima variável de estados, do m -ésimo modelo e completam a matriz da Equação(4.51). A inicialização da matriz de covariâncias $\mathbf{P}(0|0)$ foi conforme a Equação (4.52) [12].

Tabela 2 – Parâmetros de desvio padrão de ruído do processo ($i = x, y$ e z) e inicialização da matriz de covariâncias $\mathbf{P}$.

Tipos de Filtro	$\sqrt{q_i}$	$\sqrt{q_M}$	σ_M
β -EKF	10^{-3}	8×10^3	10^3
β_0 -EKF	10^{-3}	$1,2 \times 10^3$	10^3
e-EKF	10^{-3}	3×10^{-1}	10^{-2}
γ -EKF	10^{-3}	10^{-4}	10^{-4}

$$\mathbf{P}(0 | 0) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(0)_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \sigma_v^2 \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 3} & \sigma_M^2 \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

O cenário simulado corresponde a uma trajetória com ponto de detecção a distância $\rho = 2000$ m, elevação do alvo $\phi = 70^\circ$ e azimute $\theta = 60^\circ$, a partir do qual foram iniciadas as estimativas pelo EKF. O foco principal concentra-se nas componentes espaciais x , y e z , que representam as posições do projétil e, em particular, há uma ênfase especial na estimativa da sétima variável de estado, a qual incorpora informações cruciais relacionadas ao coeficiente de arrasto do projétil. Buscou-se ajustar o filtro para que esta variável fosse estimada satisfatoriamente da forma mais rápida possível.

O coeficiente de arrasto “real” foi modelado nas simulações, tomando como base o conhecimento prévio do parâmetro de arrasto, seu desvio a partir do valor nominal de $\bar{C}_d = 0,1$. Usou-se o modelo de $C_d = \bar{C}_d e^{\delta(t)}$, onde $\delta(t)$ é modelado como um processo estocástico de Wiener. O coeficiente é caracterizado por uma variável aleatória (V.A.) Gaussiana, com média zero e variância αt [24]. Sendo α uma constante, ou seja, uma V.A. com variância que se altera linearmente com o tempo t .

A Figura 21 ilustra os resultados estimados para o coeficiente de arrasto utilizando os quatro modelos discutidos na Seção 4.3. Observa-se que, nesta simulação, onde todos os modelos foram inicializados com um valor aproximado de 0,087, os modelos e-EKF e γ -EKF apresentaram erros menores. O modelo β_0 -EKF mostrou certas limitações, especialmente sob condições de variações significativas que se afastam do valor *a priori* estabelecido. Em contraste, o modelo β -EKF exibiu oscilações mais acentuadas durante a estimação, resultando em um RMSE mais elevado. Para o modelo e-EKF, adota-se um parâmetro inicial α_0 , correspondente ao valor *a priori* do coeficiente de arrasto. Por outro lado, o modelo γ -EKF, que registrou o menor erro, opera independentemente de uma estimativa *a priori* do parâmetro e obteve o menor RMSE, além disso, durante as simulações ele mostrou ser mais estável e possuir uma resposta mais rápida na estimativa. Trajetórias caracterizadas por coeficientes de arrasto distintos levam a estimativas de trajetórias diferentes. Essa discrepância torna-se pronunciada à medida que o alcance da trajetória é maior, influenciando diretamente as previsões de pontos de impacto.

Com a conclusão desta seção, estabelecemos as bases metodológicas e as ferramentas analíticas necessárias para o processamento e avaliação dos dados radar. Através da exploração detalhada do Filtro de Kalman Estendido e a consideração de diferentes modelos para os coeficientes de arrasto, bem como a aplicação de métricas de avaliação, pretende-se avançar para a próxima etapa do trabalho.

No Capítulo 5, voltaremos nossa atenção para a análise dos resultados obtidos. Esta fase será dedicada a uma investigação aprofundada dos dados e modelos apresentados, permitindo-nos compreender as tendências e padrões das estimativas de ponto de impacto e lançamento e avaliar sua eficácia.

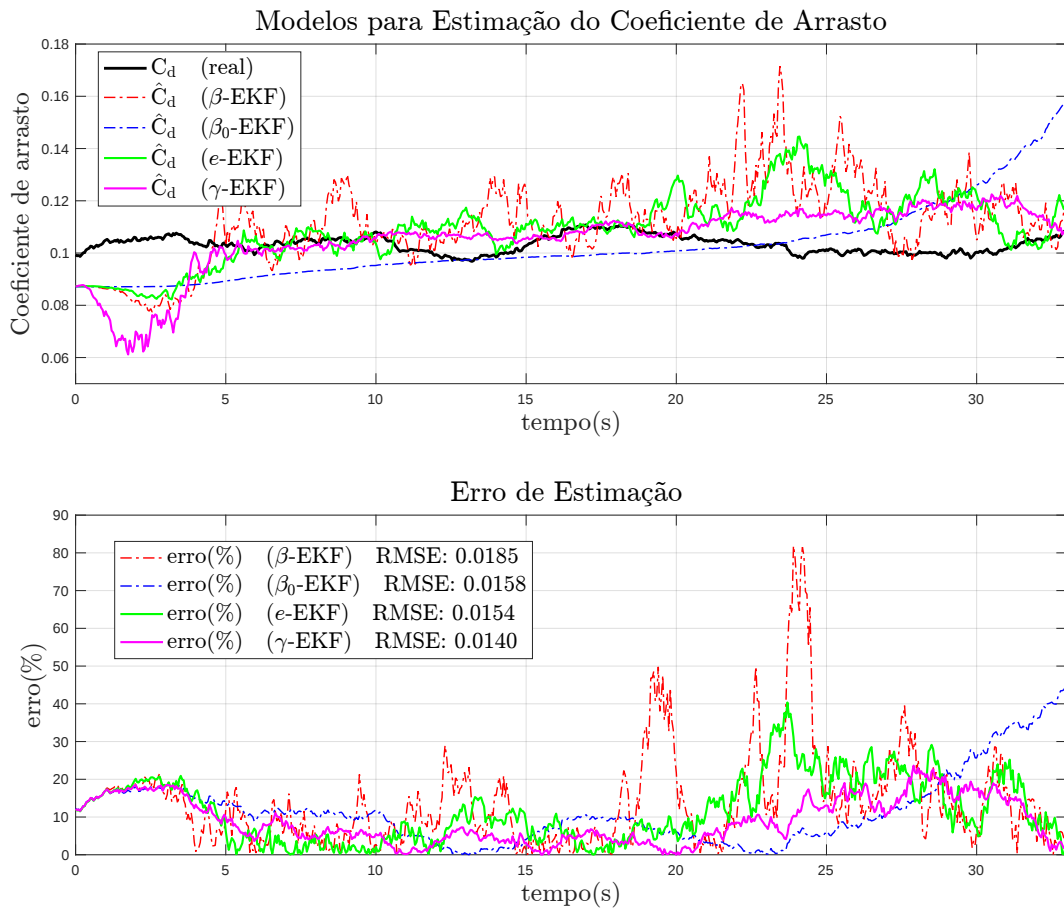


Figura 21 – Análise do desempenho dos modelos do EKF.

5 ANÁLISE DE RESULTADOS

Neste capítulo, são apresentados os resultados obtidos no trabalho. Inicialmente foi realizada uma análise das técnicas de estimação de ponto de impacto, com um enfoque particular no uso do EKF e posteriormente o estimador ML foi empregado para estimação de pontos de lançamento e impacto.

O objetivo principal é avaliar a eficácia das técnicas em diferentes cenários de rastreamento. Focamos na análise de resultados por meio das variações nos intervalos de tempo de acompanhamento do alvo, ou seja, limitando o número de amostras medidas. Esta avaliação é essencial para compreender tanto a aplicabilidade quanto a precisão do estimador em cenários práticos, onde tanto a duração do rastreamento quanto a qualidade dos dados apresentam variações significativas. Este contexto é aplicável aos sistemas de radar de contrabateria, onde tais condições operacionais são encontradas.

As estimativas de PL foram primariamente obtidas por meio do estimador de Máxima Verossimilhança (ML), que também forneceu as estimativas de ponto de impacto. Embora o EKF, um filtro recursivo que utiliza dados medidos ao longo do tempo, não tenha sido aplicado neste contexto para a estimação de PL, reconhece-se que, em certas condições e com ajustes apropriados, como a inversão temporal em filtros digitais, o EKF poderia ser uma alternativa viável. Esta possibilidade, contudo, não foi explorada neste trabalho.

É importante destacar que, na operação do EKF em malha aberta, que visa a extrapolação de estimativas, novas medições não são mais disponíveis. Assim, o filtro suspende a etapa de atualização, que normalmente integra as observações recentes ao modelo. Neste modo, o EKF depende exclusivamente das previsões do modelo. Na fase de predição, o filtro continua a funcionar com base no modelo dinâmico do sistema, projetando o estado futuro a partir das últimas estimativas conhecidas, derivadas das medições anteriores, e das leis matemáticas que governam o sistema.

Por fim, foram empregadas as métricas de avaliação para quantificar a acurácia das estimativas. Estas métricas são essenciais para uma comparação objetiva entre os diferentes cenários, a fim de se avaliar a confiabilidade das técnicas de estimação.

5.1 Estimativas de PI - EKF

Nesta seção do trabalho, exploraremos inicialmente, na Subseção 5.1.1, as simulações de estimativas do ponto de impacto utilizando o Filtro de Kalman Estendido. Esta análise focará em dados simulados para avaliar a eficácia do EKF em diferentes cenários.

Posteriormente, na Subseção 5.1.2, a atenção será voltada para as estimativas de PI utilizando o EKF aplicado a medidas reais de radar, especificamente do radar de banda C. Esta abordagem permitirá uma avaliação prática do EKF, utilizando dados obtidos do sistema de rastreamento da base de dados, para avaliar o filtro em situações reais.

5.1.1 Simulações

Inicialmente, apresentaremos as simulações realizadas com o EKF, por meio do modelo γ -EKF, modelo que demonstrou o melhor desempenho durante as simulações preliminares da Seção 4.7.

A trajetória foi simulada utilizando o método de Runge-Kutta de quarta ordem (RK4), conforme descrito na Equação (4.47). Para estas simulações, o intervalo de amostragem foi de 50 ms. As medições simuladas foram realizadas conforme os procedimentos descritos na Subseção 4.7. O cenário simulado consiste em um disparo teórico com velocidade inicial v_0 de 200 m/s², elevação ϕ de 60° e azimuth θ de 70°.

A detecção do projétil ocorreu a uma altitude aproximada de 600 m. Implementamos simulações de Monte Carlo, envolvendo um conjunto (*ensemble*) de 500 iterações independentes. Nas estimativas do Ponto de Impacto (PI), utilizamos a notação PI_E para as estimativas e PI_V para o PI real (assumido e conhecido por tratar-se de uma simulação).

Para representar a região de confiança das estimativas, recorre-se às Equações (4.42) e (4.43), empregando a elipse χ^2_2 (99%) e o círculo de alerta χ^2_2 (99%), que definem a “zona de aviso” mencionada na Subseção 4.6.2. O centro dessas regiões (elipse e círculo de alerta) foi estimado utilizando o método *k-means* [57].

Foi utilizado o TLE como o limite de tolerância de erro, descrito na Subseção 4.6.4, ajustado a 85% — parâmetro estipulado como requisito para um radar de contrabateria para projéteis de morteiro 120 mm, como apresentado na Tabela 1. Nessa configuração, também foi definido um círculo com raio (r) correspondente à distância do TLE.

O intervalo de tempo da trajetória, entre a detecção e o impacto do projétil, foi de 36 segundos. Visando avaliar o desempenho do filtro, simulamos os intervalos de tempo do rastreamento de forma decrescente, variando de 14 a 2 segundos. À medida que o intervalo de rastreamento diminui (indicado pela barra de cores lateral), as medições se tornam mais limitadas, e o filtro opera com um número reduzido de amostras. As figuras sequenciais ilustram os resultados desse cenário.

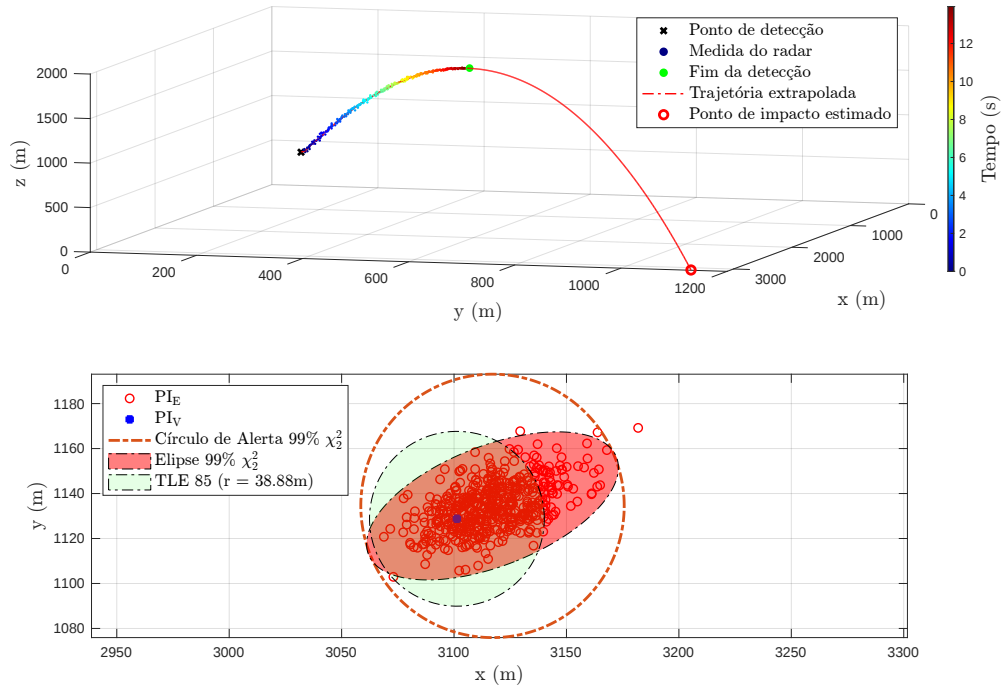


Figura 22 – Estimativas do EKF para PI com 14 s de rastreo.

A Figura 22 mostra o desempenho simulado com um tempo de rastreo de 14 s, que resultou em uma Elipse e um Círculo de Alerta de cerca de 115 m de diâmetro, com o raio do TLE a 85% sendo de cerca de 38,88 m. Para esta simulação, o intervalo de rastreo de 14 s não atinge o requisito de TLE a 85% com um raio de 30 m, conforme previsto na Tabela 1.

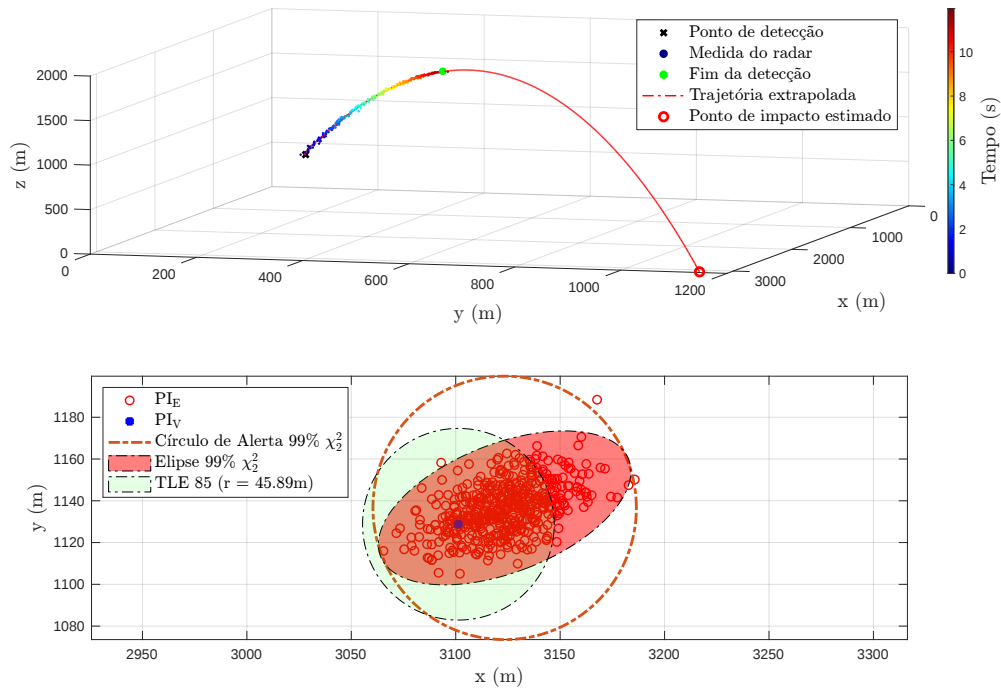


Figura 23 – Estimativas do EKF para PI com 12 s de rastreo

A Figura 23 mostra o desempenho simulado com um tempo de rastreo de 12 s, que resultou em uma Elipse χ^2_2 (99%) contendo o PI_V e um Círculo de Alerta χ^2_2 (99%) de cerca de 120 m de diâmetro, com o raio do TLE a 85% sendo de cerca de 45,89 m.

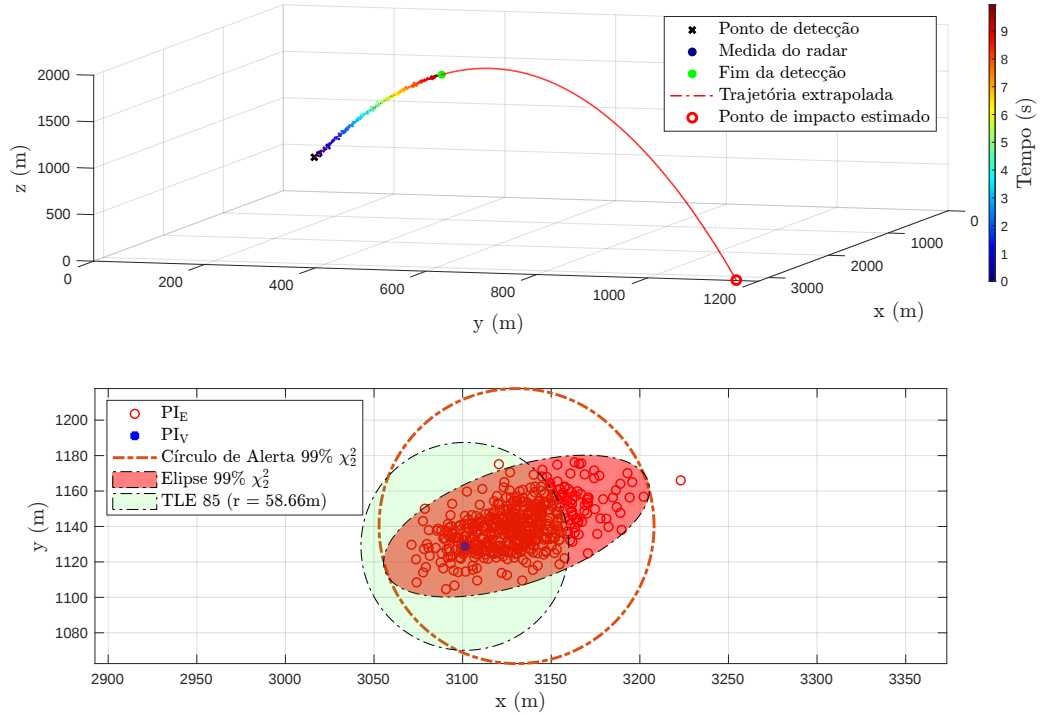


Figura 24 – Estimativas do EKF para PI com 10 s de rastreo

A Figura 24 mostra o desempenho simulado com um tempo de rastreo de 10 s, que resultou em uma Elipse χ^2_2 (99%) contendo o PI_V e um Círculo de Alerta χ^2_2 (99%) de cerca de 140 m de diâmetro, com o raio do TLE a 85% sendo de cerca de 58,66 m.

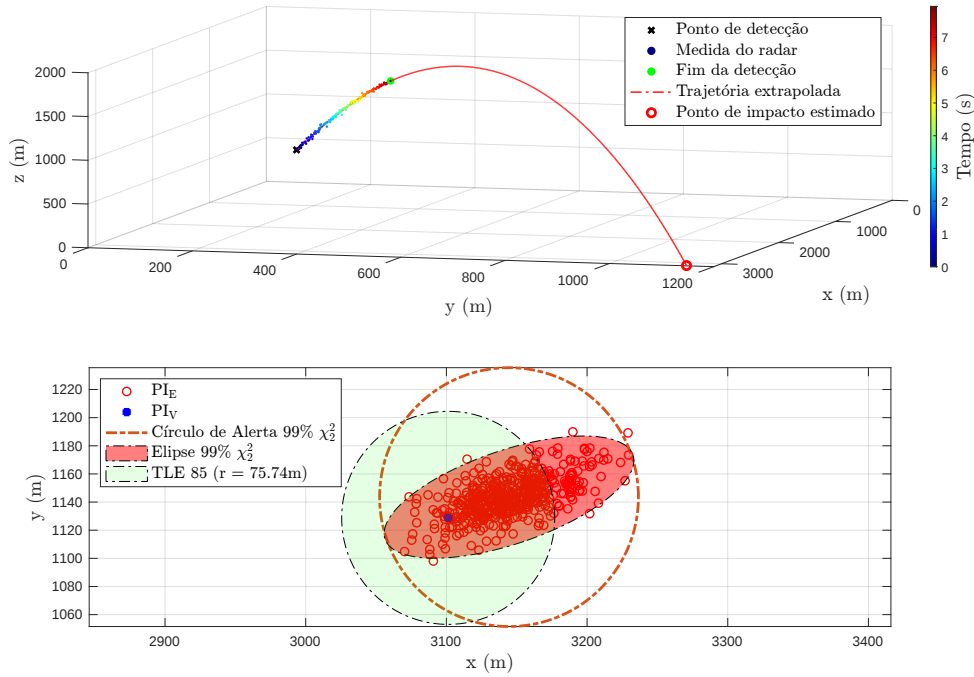


Figura 25 – Estimativas do EKF para PI com 8s de rastreo

A Figura 25 mostra o desempenho simulado com um tempo de rastreo de 8 s, que resultou em uma Elipse χ^2_2 (99%) contendo o PI_V e um Círculo de Alerta χ^2_2 (99%) de cerca de 175 m de diâmetro, com o raio do TLE a 85% sendo de cerca de 75,74 m.

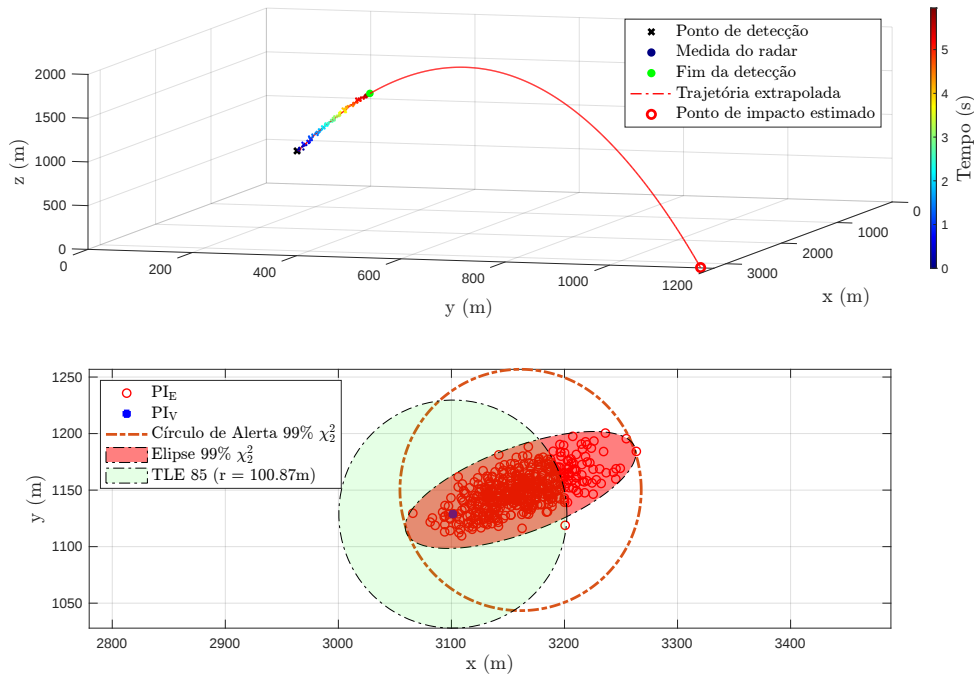


Figura 26 – Estimativas do EKF para PI com 6 s de rastreo

A Figura 26 mostra o desempenho simulado com um tempo de rastreo de 6 s, que resultou em uma Elipse χ^2_2 (99%) contendo o PI_V e um Círculo de Alerta χ^2_2 (99%) de

cerca de 220 m de diâmetro, com o raio do TLE a 85% sendo de cerca de 100,87 m.

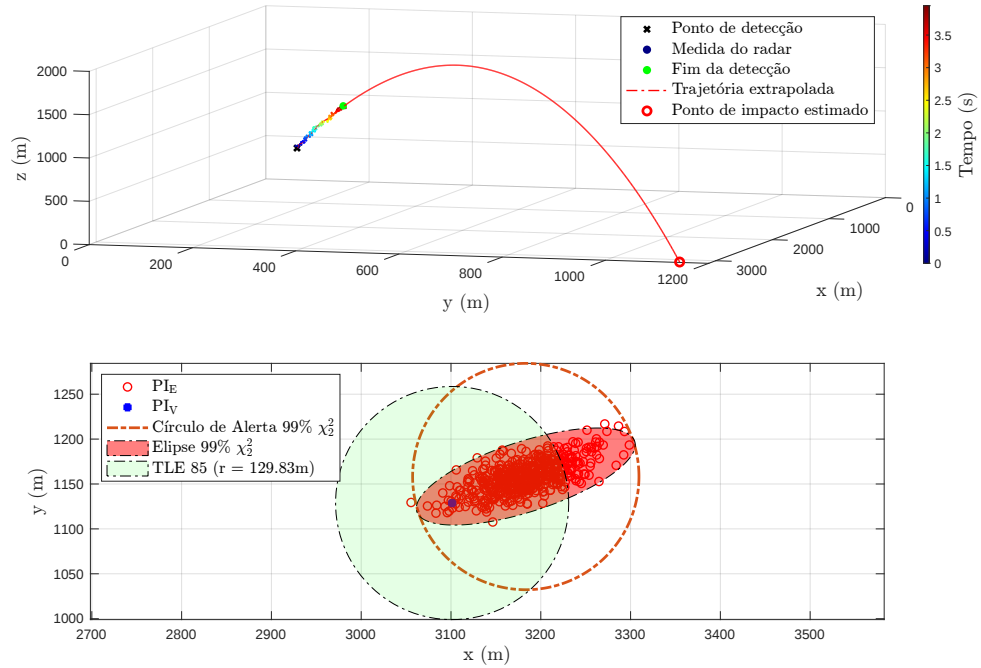


Figura 27 – Estimativas do EKF para PI com 4s de rastreo

A Figura 27 mostra o desempenho simulado com um tempo de rastreo de 4 s, que resultou em uma Elipse χ^2_2 (99%) contendo o PI_V e um Círculo de Alerta χ^2_2 (99%) de cerca de 250 m de diâmetro, com o raio do TLE a 85% sendo de cerca de 129,83 m.

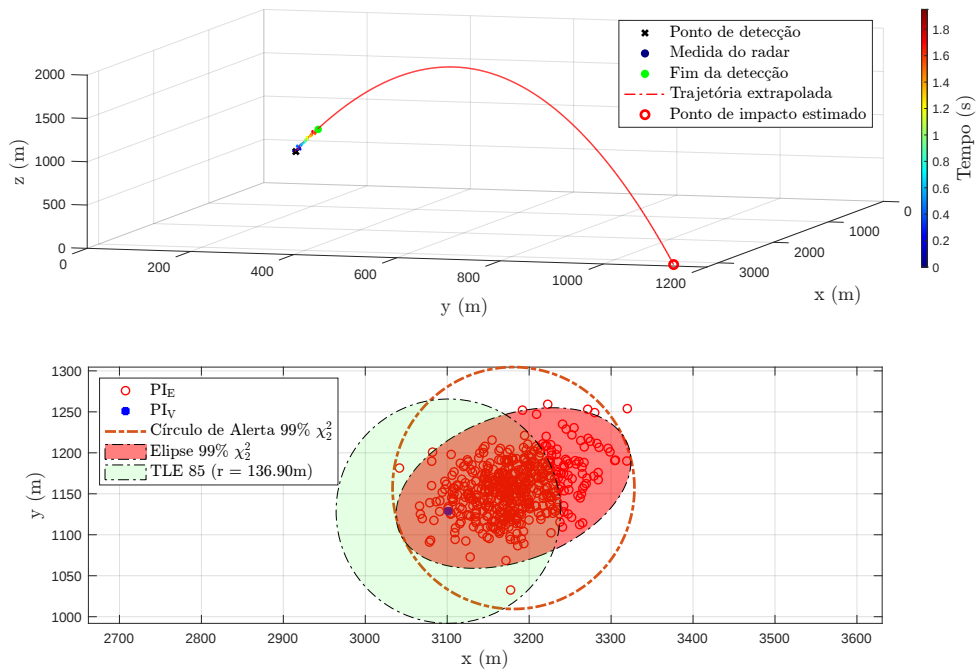


Figura 28 – Estimativas do EKF para PI com 2s de rastreo

Por fim, a Figura 28 mostra o desempenho simulado com um tempo de rastreo de

2 s, que resultou em uma Elipse χ^2_2 (99%) contendo o PI_V e um Círculo de Alerta χ^2_2 (99%) de cerca de 290 m de diâmetro, com o raio do TLE a 85% sendo de cerca de 136,9 m.

As simulações das estimativas com intervalo de rastreo de 12 s ou menos, mostraram que o círculo do TLE a 85% começa a apresentar uma parte de sua área fora do Círculo de Alerta χ^2_2 (99%). Isso indica que, nesses intervalos de tempo de rastreo mais curtos, a precisão na localização do alvo fornecida pelo TLE é reduzida, resultando em uma maior área de incerteza que ultrapassa os limites estabelecidos pelo Círculo de Alerta.

É importante salientar que a precisão do algoritmo é influenciada não somente pelo tempo de rastreamento de maneira direta, mas também pela extensão da trajetória futura que necessita ser estimada. Quanto mais distante o ponto de rastreamento estiver do final da trajetória, maior será o erro de predição acumulado.

A Figura 29 sintetiza dois parâmetros relevantes dos resultados ao longo dos diferentes intervalos de rastreamento. A parte superior da figura ilustra a dispersão das estimativas. A linha azul mostra o desvio do erro entre o ponto de impacto verdadeiro e o estimado, enquanto a linha vermelha representa o erro entre o centro das elipses e os pontos estimados. Ambas as medidas indicam uma diminuição significativa na dispersão das estimativas à medida que o intervalo de rastreamento aumenta, ou, analogamente, quando o número de amostras é maior.

No gráfico inferior da mesma imagem, observa-se que o RMSE (Root Mean Square Error) para os intervalos de rastreamento diminui conforme esperado, à medida que mais informações são obtidas pelas medições, resultando em melhores estimativas do ponto de impacto. Nos intervalos de 2 e 4 segundos, nota-se erros similares para a curva azul, em contraste com os demais intervalos, onde se percebe uma tendência descendente mais acentuada no erro à medida que o número de amostras aumenta.

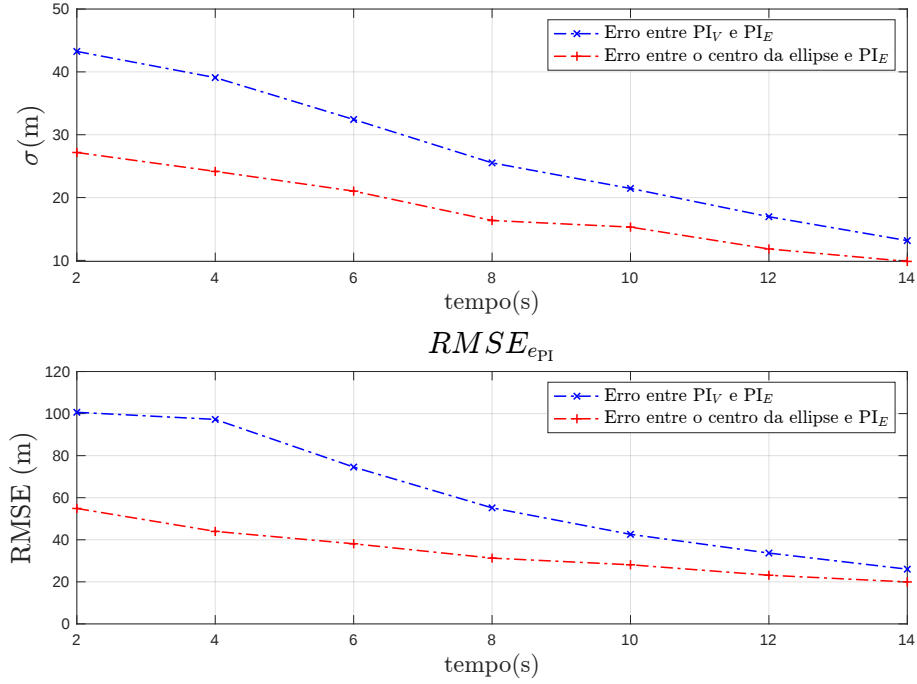


Figura 29 – Dispersão (σ) e RMSE das estimativas de PI para o EKF

5.1.2 Medidas Reais

Nesta subseção, apresentamos um estudo das simulações realizadas utilizando medidas de radar e o Filtro de Kalman Estendido em contextos práticos, especificamente aplicados a dois disparos de projéteis de calibres diferentes. O objetivo dessas simulações foi replicar condições semelhantes às encontradas em trajetórias reais, permitindo uma avaliação mais precisa da eficácia do EKF em cenários realistas.

Para quantificar o erro de estimação nas simulações, introduzimos um vetor de erro. Este vetor não só mensura a magnitude do erro de estimação, mas também serve como um componente crítico na análise da precisão do EKF. O módulo deste vetor de erro é utilizado como uma métrica para avaliar o desempenho do filtro nas diferentes condições simuladas.

A matriz de covariância $\mathbf{R}(k)$, vinculada aos erros de medição e à transformação de coordenadas de azimuth, elevação e distância (AER) para ENU, é calculada utilizando a linearização de primeira ordem das medições de radar, conforme delineado por [48].

Além disso, para uma representação visual intuitiva do erro, são mostrados de forma gráfica os círculos com raios correspondentes ao módulo do vetor de erro. Esta abordagem permite uma compreensão visual imediata da precisão das estimativas do EKF, facilitando a análise comparativa entre os diferentes tiros e condições simuladas.

As simulações e análises subsequentes visam não apenas testar a robustez do EKF em situações práticas, mas também oferecer informações importantes sobre as limitações

e potenciais melhorias na técnica de estimação de ponto de impacto para projéteis de morteiro. As tabelas seguintes oferecem um panorama das características dos disparos registrados pelo radar. Elas incluem as posições da lançadora e do radar, indicadas por latitude Φ e longitude λ , juntamente com as respectivas altitudes.

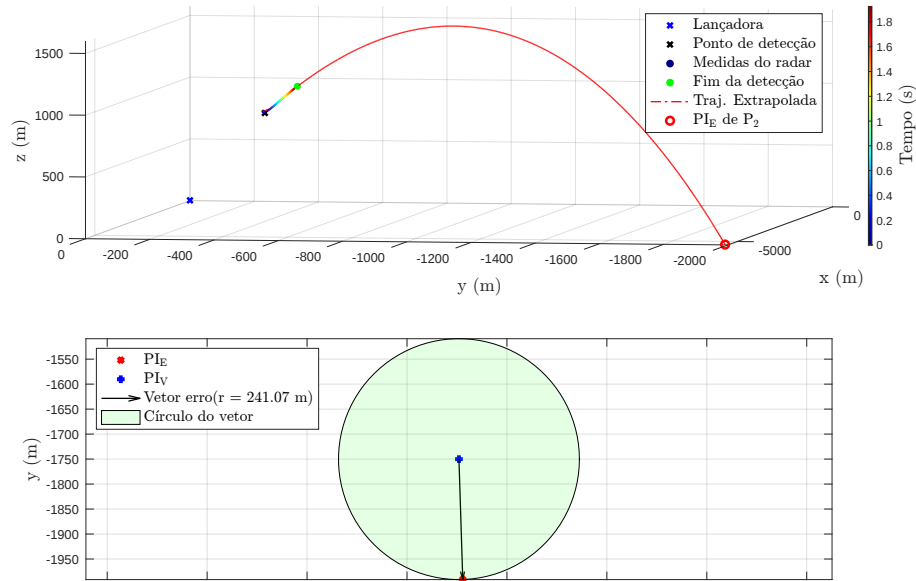
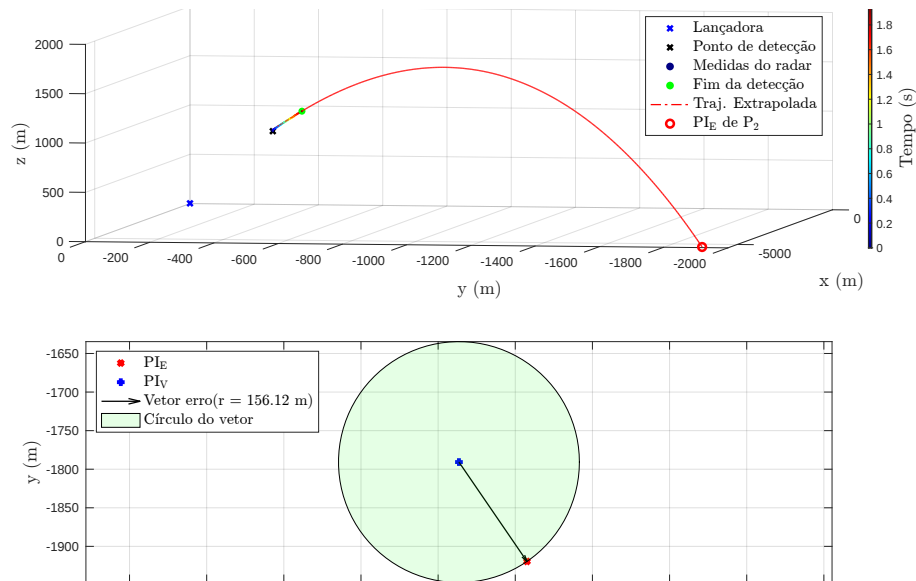
Tabela 3 – Tabela de informações do Tiro P_1

Tiro com projétil P_1	
Projétil	Morteiro 120 mm
Elevação do Tiro	45°
Azimute do Tiro	250°
Posição da Lançadora	Φ : -23.049178°, λ : -43.633345°, Altitude: 0,9 m
Posição do Radar	Φ : -23.049319°, λ : -43.633182°, Altitude 5,1 m
Tempo de Lançamento (Top)	14:47:36.543342

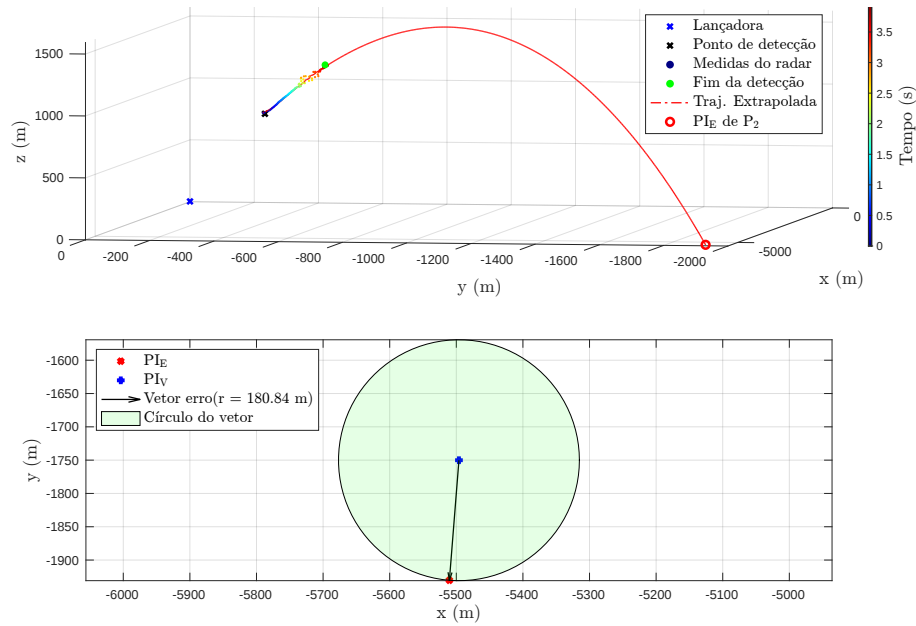
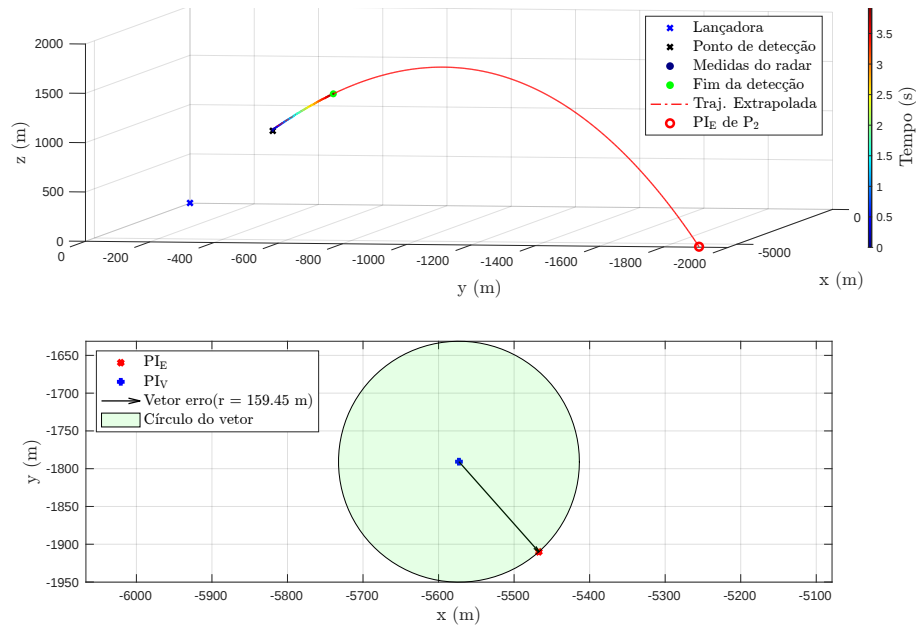
Tabela 4 – Tabela de informações do Tiro P_2

Tiro com projétil P_2	
Projétil	Morteiro 81 mm
Elevação do Tiro	45°
Azimute do Tiro	260°
Posição da Lançadora	Φ : -23.049181°, λ : -43.633323°, Altitude: 2,5 m
Posição do Radar	Φ : -23.049118°, λ : -43.632974°, Altitude 3,9 m
Tempo de Lançamento (Top)	16:56:54.303807

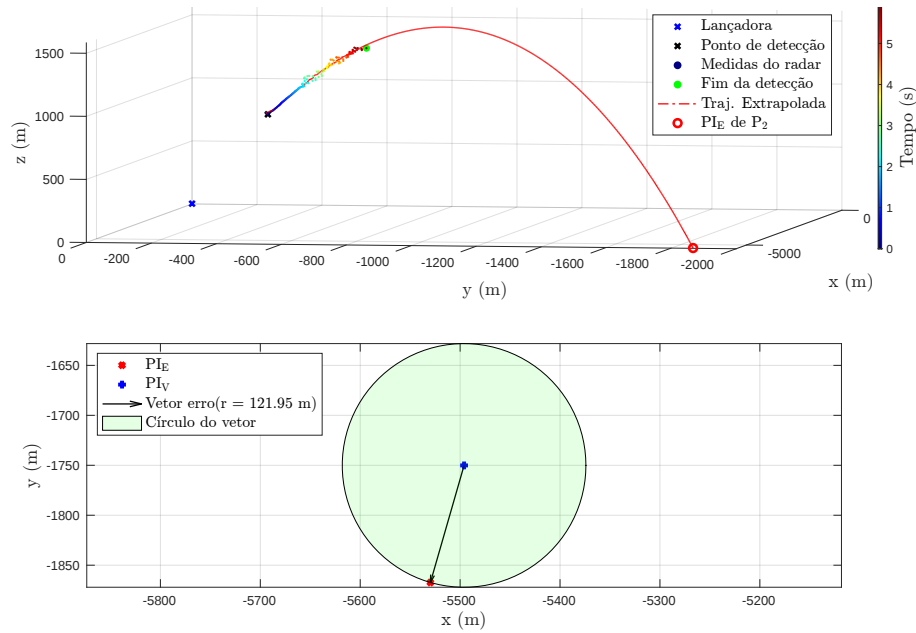
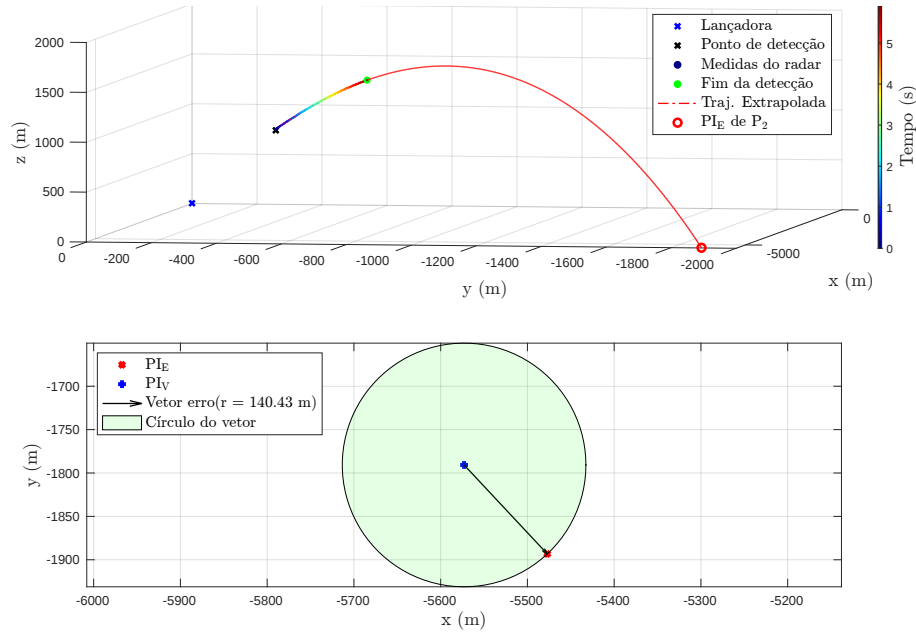
Neste estudo, procederemos com a análise dos resultados conforme os intervalos de rastreamento, seguindo uma ordem crescente de 2 a 14 segundos. Esta abordagem permitirá uma avaliação detalhada por tempo para os projéteis distintos, identificados como P_1 e P_2 . Ao examinar as estimativas para cada intervalo de tempo especificado, nosso foco será entender como as características únicas de cada projétil influenciam a precisão das estimativas. Essa análise comparativa nos dá conhecimentos sobre a variação das estimativas em função das diferenças intrínsecas entre os dois tipos de projéteis, proporcionando uma compreensão mais aprofundada da dinâmica de rastreamento em diferentes cenários temporais.

I. Estimativas P_1 e P_2 para 2 sFigura 30 – Estimativas do EKF para PI com 2s de rastreo (P_1).Figura 31 – Estimativas do EKF para PI com 2s de rastreo (P_2)

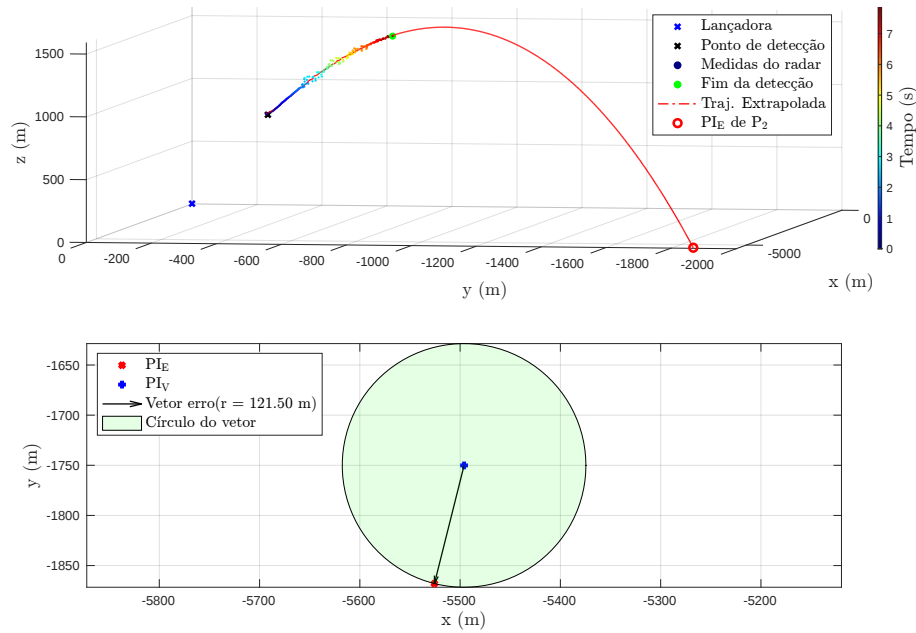
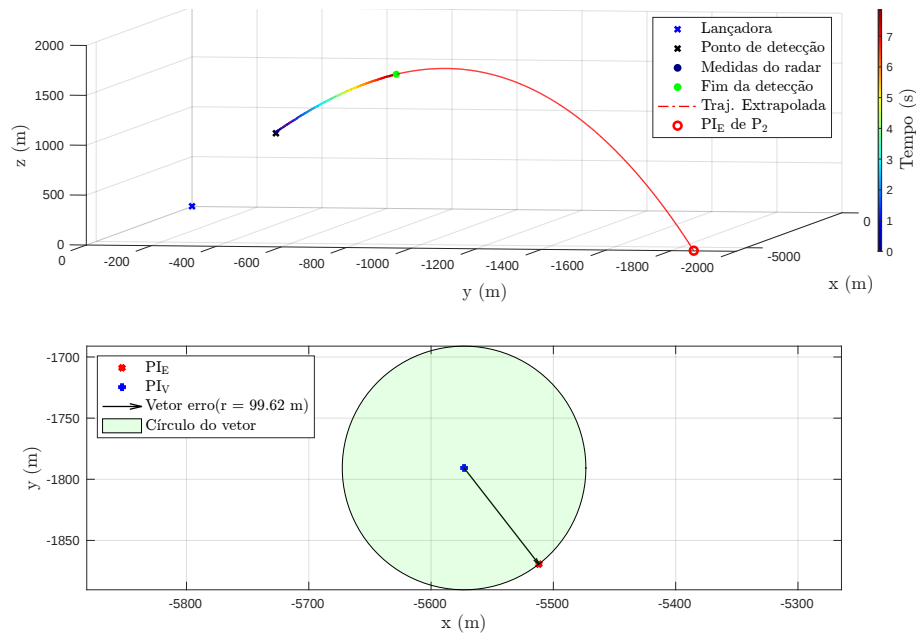
As Figuras 30 e 31 ilustram o cenário mais extremo que simulamos, com um período de rastreamento de apenas 2 segundos. Neste cenário, o projétil P_1 registrou um erro significativamente maior, atingindo 241,07 metros, em comparação com o erro de 156,12 metros do projétil P_2 . Isso representa uma diferença percentual de aproximadamente 54,41% a mais no erro do projétil P_1 em relação ao P_2 . Esses resultados, em um intervalo de tempo curto, destacam as variações na precisão do rastreamento em função das características específicas de cada tipo de projétil, como seu calibre, massa e formato.

II. Estimativas P_1 e P_2 para 4 sFigura 32 – Estimativas do EKF para PI com 4s de rastreo (P_1).Figura 33 – Estimativas do EKF para PI com 4s de rastreo (P_2).

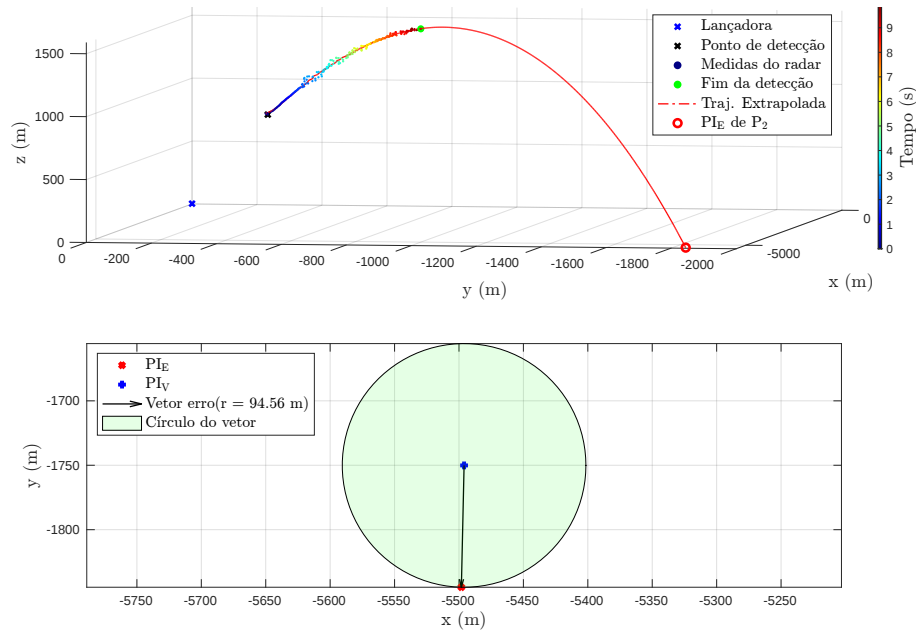
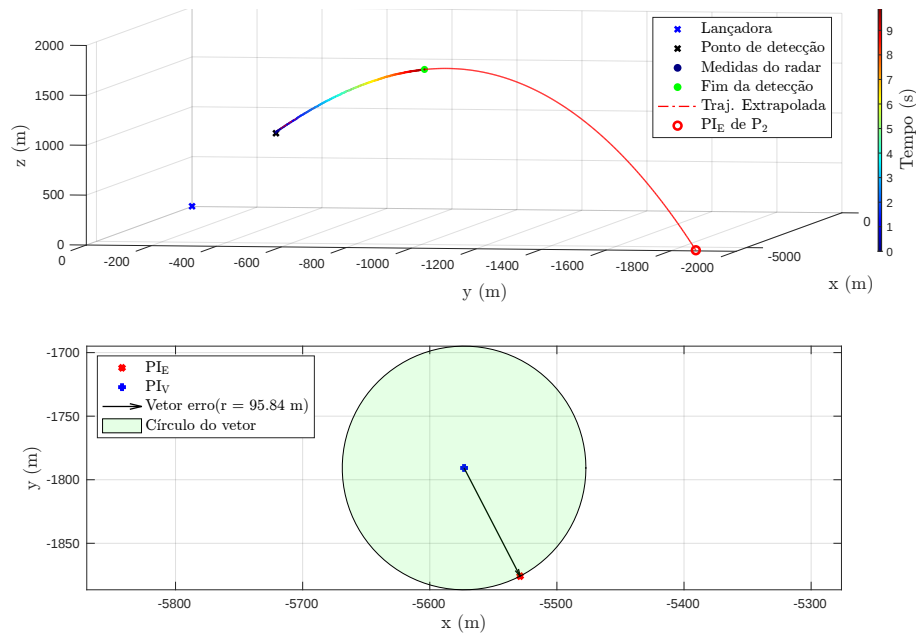
As Figuras 32 e 33 representam o cenário de rastreamento com duração de 4 segundos. Neste contexto, o projétil P_1 apresentou um erro maior, de 180,84 metros, em comparação com o erro de 159,45 metros do projétil P_2 . Isso equivale a uma diferença percentual de aproximadamente 13,41% a mais no erro do projétil P_1 em relação ao P_2 . Estes resultados indicam uma variação na precisão do rastreamento entre os dois projéteis, mesmo em um intervalo de tempo moderado como 4 segundos.

III. Estimativas P_1 e P_2 para 6 sFigura 34 – Estimativas do EKF para PI com 6s de rastreo (P_1).Figura 35 – Estimativas do EKF para PI com 6s de rastreo (P_2).

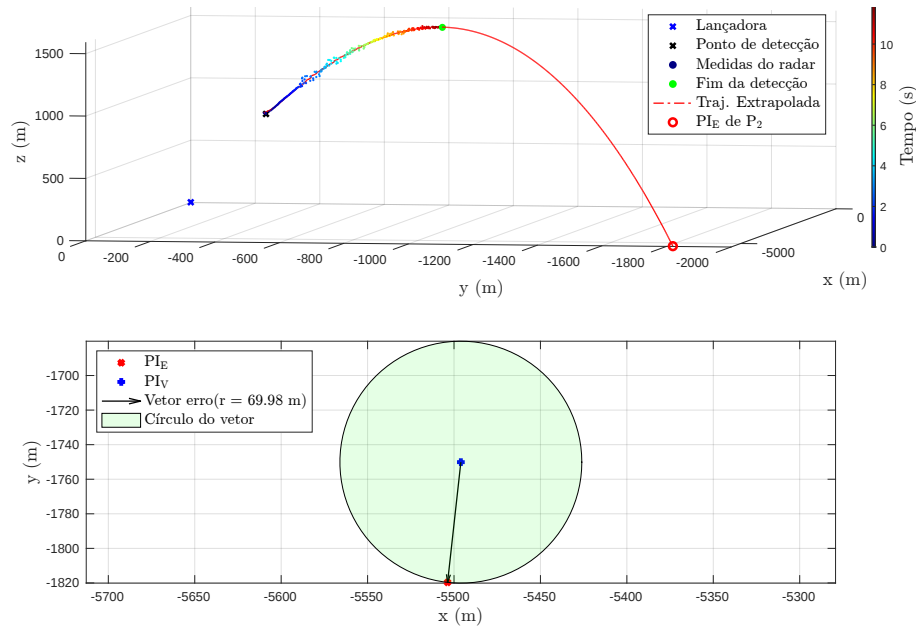
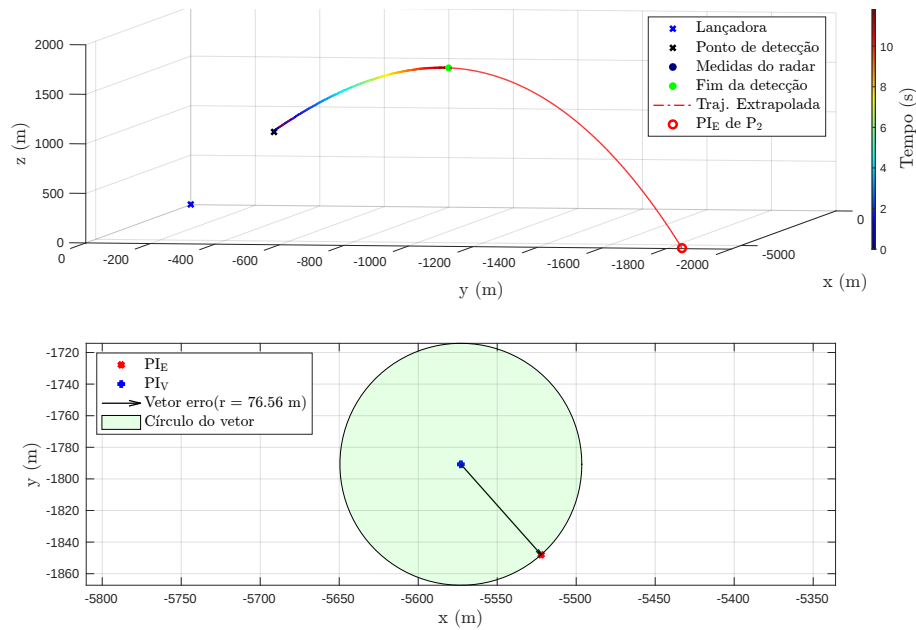
As Figuras 34 e 35 representam o cenário de rastreamento de 6 segundos. Neste cenário, o projétil P_1 apresentou um erro menor, de 121,95 metros, em comparação com o erro de 140,43 metros do projétil P_2 . Isso representa uma diferença percentual de aproximadamente 15,15% a menos no erro do projétil P_1 em relação ao P_2 . Esses resultados demonstram uma inversão na tendência observada nos intervalos de tempo mais curtos, com o projétil P_1 apresentando maior precisão no cenário de 6 segundos.

IV. Estimativas P_1 e P_2 para 8 sFigura 36 – Estimativas do EKF para PI com 8s de rastreo (P_1).Figura 37 – Estimativas do EKF para PI com 8s de rastreo (P_2).

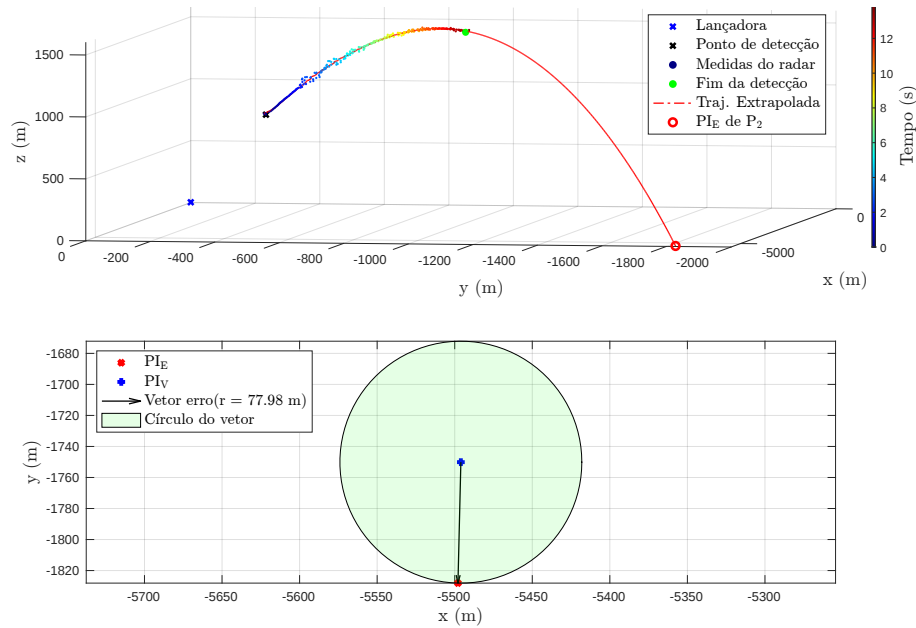
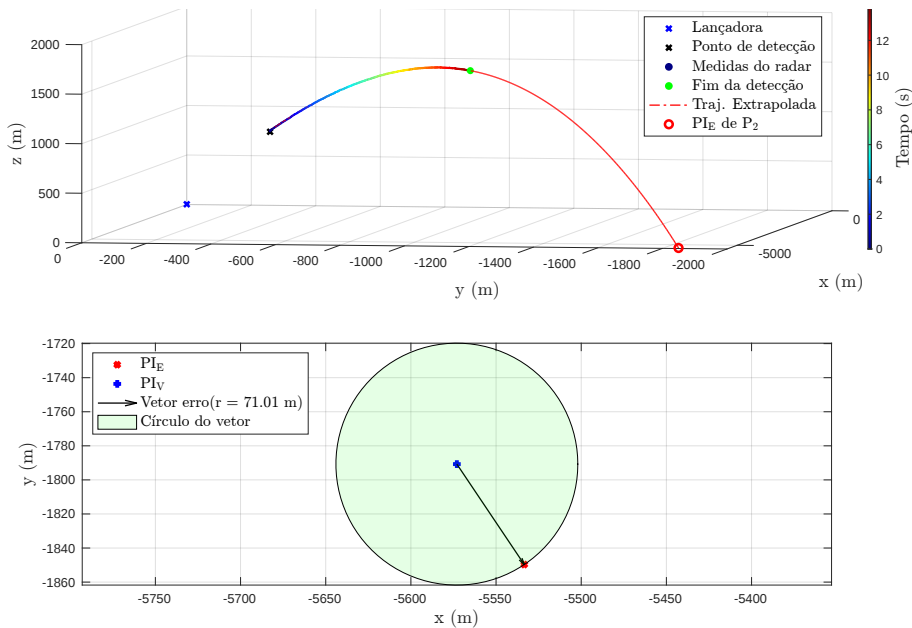
As Figuras 36 e 37 representam o cenário de rastreamento de 8 segundos. Neste cenário, o projétil P_1 apresentou um erro maior, de 121,5 metros, em comparação com o erro de 99,62 metros do projétil P_2 . Isso resulta em uma diferença percentual de aproximadamente 21,96% a mais no erro do projétil P_1 em relação ao P_2 . Esses resultados indicam uma variação na precisão do rastreamento entre os dois projéteis em um intervalo de tempo mais longo.

V. Estimativas P_1 e P_2 para 10 sFigura 38 – Estimativas do EKF para PI com 10 s de rastreo (P_1).Figura 39 – Estimativas do EKF para PI com 10s de rastreo (P_2).

As Figuras 38 e 39 representam o cenário de rastreamento de 10 segundos. Neste cenário, o projétil P_1 apresentou um erro ligeiramente menor, de 94,56 metros, em comparação com o erro de 95,84 metros do projétil P_2 . Isso resulta em uma diferença percentual de aproximadamente 1,35% a menos no erro do projétil P_1 em relação ao P_2 . Esses resultados mostram uma diferença mínima na precisão do rastreamento entre os dois projéteis em um intervalo de tempo mais extenso.

VI. Estimativas P_1 e P_2 para 12 sFigura 40 – Estimativas do EKF para PI com 12s de rastreo (P_1).Figura 41 – Estimativas do EKF para PI com 12s de rastreo (P_2).

As Figuras 40 e 41 representam o cenário de rastreamento de 12 segundos. Neste cenário, o projétil P_1 apresentou um erro menor, de 69,98 metros, em comparação com o erro de 76,56 metros do projétil P_2 . Isso resulta em uma diferença percentual de aproximadamente 9,40% a menos no erro do projétil P_1 em relação ao P_2 . Estes resultados indicam uma melhoria na precisão do rastreamento para o projétil P_1 em um intervalo de tempo mais longo.

VII. Estimativas P_1 e P_2 para 14 sFigura 42 – Estimativas do EKF para PI com 14s de rastreo (P_1).Figura 43 – Estimativas do EKF para PI com 14s de rastreo (P_2).

As Figuras 42 e 43 representam o cenário de rastreamento de 14 segundos. Neste cenário, o projétil P_1 apresentou um erro maior, de 77,98 metros, em comparação com o erro de 71,01 metros do projétil P_2 . Isso resulta em uma diferença percentual de aproximadamente 9,82% a mais no erro do projétil P_1 em relação ao P_2 . Esses resultados indicam uma variação na precisão do rastreamento entre os dois projéteis neste intervalo de tempo mais extenso.

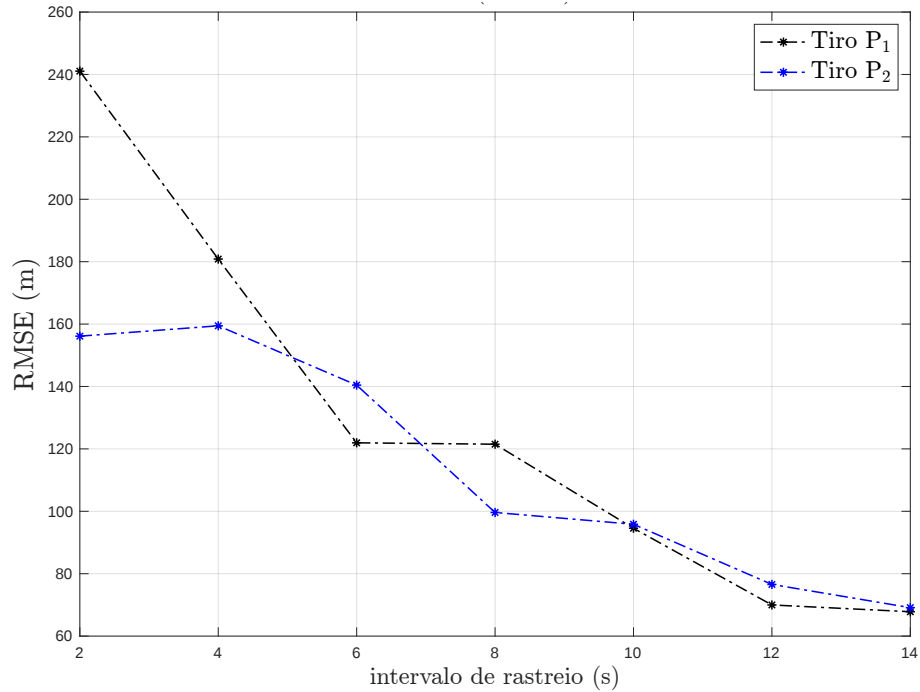


Figura 44 – RMSE das estimativas de PI para o EKF com medidas radar

Na Figura 44, é apresentado o Erro Quadrático Médio (RMSE) das estimativas ao longo do rastreamento do projétil. Conforme esperado, observa-se uma redução no erro de estimativa à medida que mais dados são coletados. A diferença mais notável é vista no intervalo das simulações de 2 segundos, onde o projétil P_1 apresenta um erro significativamente maior em comparação com o P_2 . A relação sinal-ruído (SNR) das medidas de P_1 e P_2 são fornecidas pelo STREV, sendo que P_1 apresenta uma SNR média menor que P_2 . A SNR mais baixa implica que, para um dado nível de sinal, há mais ruído nas medidas de P_1 do que em P_2 .

No contexto da análise realizada entre P_1 e P_2 utilizando o EKF, ocorrem variações nos padrões de erro entre essas duas trajetórias. Conforme destacado na Figura 44, em determinados momentos, houve uma inversão comparativa nos erros, onde um ultrapassou o outro em magnitude. Como hipótese plausível que pode explicar este fenômeno é a diferença nas trajetórias rastreadas, especialmente em relação ao apogeu. O apogeu, sendo o ponto mais alto da trajetória, representa um momento crítico no qual fatores dinâmicos interagem. A passagem ou não por este ponto pode resultar em diferentes comportamentos dinâmicos, o que consequentemente afeta a precisão do rastreamento realizado pelo EKF.

Quando a trajetória passa pelo apogeu, as condições dinâmicas mudam rapidamente, o que pode temporariamente desafiar as suposições do EKF, especialmente se a linearização não capturar adequadamente a complexidade do sistema nesse ponto. Isso pode resultar em um aumento temporário dos erros de estimativa para a trajetória que ultrapassa o

apogeu, comparado à trajetória que ainda não passou pelo ponto de altitude máxima.

A análise do coeficiente de arrasto (C_d) de projéteis de morteiro requer a consideração de vários fatores, como a forma do projétil, sua velocidade e a densidade do ar. No caso dos morteiros de calibres 120mm (P_1) e 81mm (P_2) estudados, foram estimados os coeficientes de arrasto por meio do EKF, considerando todas as medidas disponíveis, observa-se que o maior calibre de P_1 resulta em um C_d inicialmente mais elevado. Esta tendência é consistente com a maior resistência ao ar enfrentada por projéteis maiores, especialmente à medida que a velocidade aumenta. Durante a trajetória, o C_d de ambos os projéteis diminui no ápice, onde a velocidade é menor, e aumenta novamente à medida que aceleram na descida. O C_d menor estimado para P_2 reflete a menor resistência do ar devido ao seu tamanho reduzido.

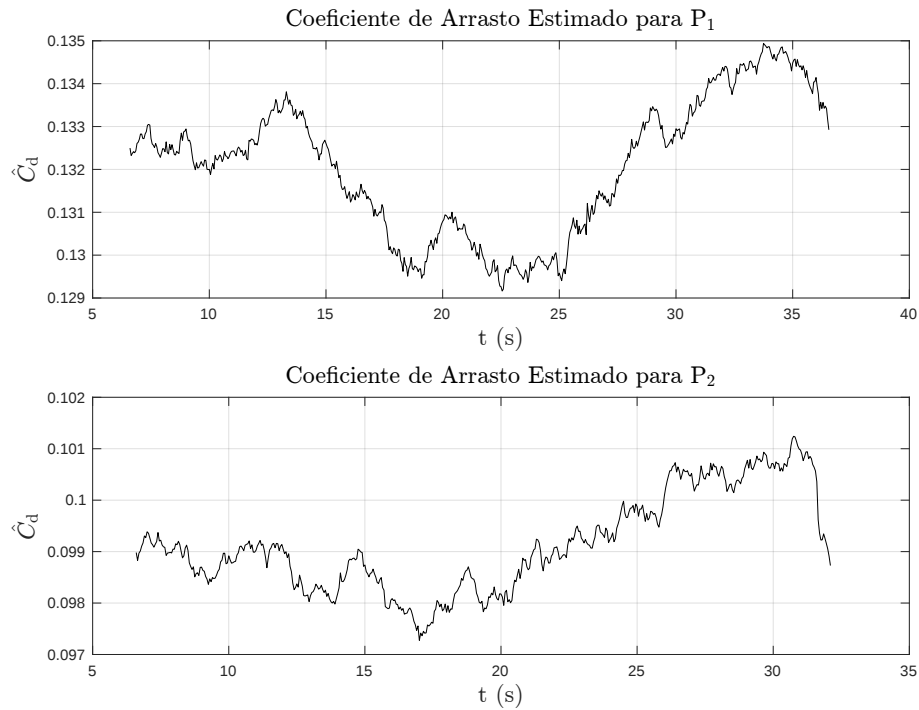


Figura 45 – Estimativas de C_d fornecidas pelo EKF com as medidas do radar (P_1 e P_2)

5.2 Resultados para PI e PL: Estimador ML

Nesta seção, apresentam-se os resultados obtidos com o uso do Estimador de Máxima Verossimilhança para os pontos de impacto e lançamento. Além disso, aborda-se a resolução do problema de Máxima Verossimilhança utilizando dois métodos: Algoritmos Genéticos, conforme discutido na Seção 3.4.3.1, e o Algoritmo de Levenberg-Marquardt, conforme exposto na Seção 3.4.3.2. Esta análise é crucial para avaliar a eficácia dessas técnicas computacionais na otimização e precisão das estimativas. Retornando ao problema de otimização expresso pela Equação (3.30), concentra-se na solução para encontrar o mínimo da função custo, conforme descrito pela Equação (3.31).

5.2.1 Solução por Algoritmos Genéticos

Nas simulações realizadas, em um primeiro cenário, observou-se um alto custo computacional devido à limitada informação disponível, o que ampliou o espaço de busca do algoritmo genético (AG). A Figura abaixo mostra o desempenho do AG neste primeiro cenário, sem as informações do EKF. Nesta simulação foi utilizada uma população de 100 indivíduos/soluções candidatas, cada um representando uma possível solução para o problema, com uma geração máxima de 50 para a evolução dessas soluções. O tempo de processamento foi de 34,15 segundos e a simulação se encerrou devido ao limite estabelecido para a geração, alcançando uma função custo de aproximadamente $3,7 \times 10^{-3}$.

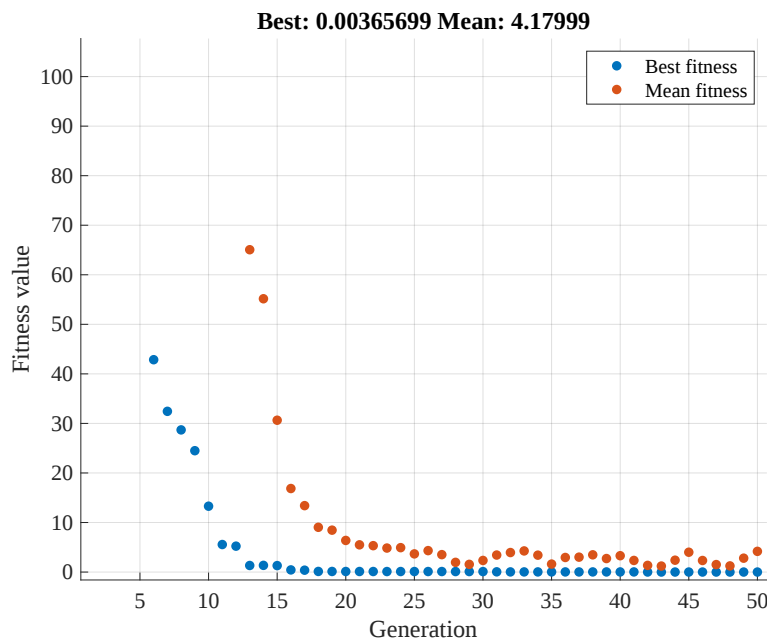


Figura 46 – Desempenho AG - cenário I.

Buscando contornar o alto custo computacional e melhorar as estimativas, realizamos novas simulações empregando estimativas iniciais fornecidas pelo Filtro de Kalman. No cenário II, configuramos o Algoritmo Genético (AG) utilizando dados iniciais das componentes de velocidade obtidos logo após a detecção pelo EKF. Esses valores foram estabelecidos como limites inferiores para os parâmetros de velocidade inicial $v_0 = [v_{x0} \ v_{y0} \ v_{z0}]^T$. Adicionalmente, restringimos os limites do parâmetro de arrasto com base nas estimativas fornecidas pelo EKF. Considerando que o parâmetro de arrasto no AG é denotado por $x_{AG}(7)$ e a estimativa do EKF é $\hat{C}_D^*$, impõe-se a restrição $\hat{C}_D^* - \delta\hat{C}_D^* < x_{AG}(7) < \hat{C}_D^* + \delta\hat{C}_D^*$, onde $\delta\hat{C}_D^*$ denota uma margem estabelecida dentro de um intervalo especificado para o funcionamento do algoritmo.

A Figura 47 mostra o valor da função custo ao longo das gerações, limitadas a 50. Mesmo com essa alteração, o tempo de processamento foi de 33,86 segundos e a simulação também se encerrou devido ao limite estabelecido para a geração, alcançando uma função

custo de aproximadamente $1,2 \times 10^{-3}$.

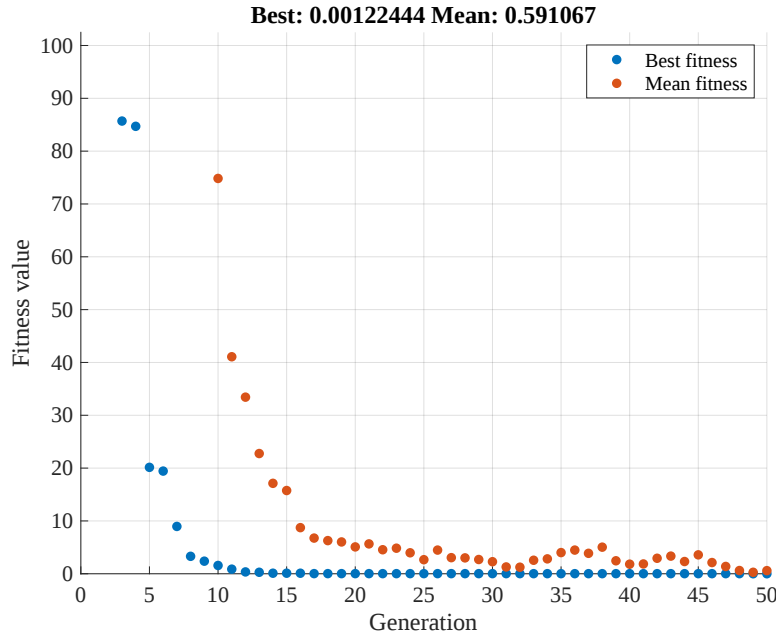


Figura 47 – Desempenho AG - cenário II.

Embora o Algoritmo Genético seja uma ferramenta poderosa na busca pela solução ótima em problemas de otimização, sua aplicação prática na estimativa de pontos de impacto e lançamento revelou uma necessidade significativa de tempo para convergir ao mínimo da função custo, característica que foi mencionada como possível ao fim da Seção 3.4.3.1.

Essa característica motivou a busca por métodos alternativos que pudessem oferecer soluções mais rápidas e com menores erros sem recorrer a recursos computacionais de maior desempenho (despendiosos e de mais difícil emprego operacional). Nesse contexto, o Algoritmo de Levenberg-Marquardt pode ser uma escolha promissora. Sua capacidade de oferecer resultados mais rápidos e precisos o tornou uma alternativa viável e eficaz para a aplicação em questão.

5.2.2 Solução por Algoritmo de Levenberg-Marquardt

Nesta seção, apresentaremos os resultados obtidos utilizando o Algoritmo de Levenberg-Marquardt (LM) aplicado a um cenário específico de estimação. Nosso foco principal será comparar as estimativas do Ponto de Impacto (PI) geradas pelo LM com aquelas fornecidas pelo Filtro de Kalman Extendido (EKF). Esta comparação visa destacar as diferenças em precisão e eficiência entre os dois métodos. Em seguida, exploraremos as estimativas de ponto de lançamento proporcionadas pelo LM, oferecendo uma visão abrangente da sua aplicabilidade e eficácia em diferentes aspectos da estimação de trajetória.

Estes resultados nos permitirão avaliar a viabilidade do LM como uma ferramenta robusta para problemas de estimação em contextos práticos.

Diferentemente do AG, o Algoritmo de LM requer uma condição inicial para iniciar a busca pelo mínimo global. Neste contexto, adotamos a mesma estratégia usada para o AG, utilizando as componentes de velocidade do vetor de estados e o parâmetro de arrasto como informações a priori fornecidas pelo EKF. Para as componentes da posição inicial $\mathbf{p}_0 = [x_0, y_0, z_0]$, utilizamos uma aproximação inicial menos precisa, baseada em uma estimativa linear no plano xy (com eixo $z = 0$), ligando o primeiro ponto de detecção do alvo.

Após algumas simulações, percebeu-se a necessidade de mais amostras das medidas de posição filtradas pelo EKF para aprimorar a precisão dessa reta. Utilizamos, então, uma diferença de dois pontos para definir a direção da reta. A equação da reta em três dimensões e parametrizada pode ser expressa como:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{d} \quad (5.1)$$

onde $\mathbf{r}(t)$ representa a posição no espaço em função do parâmetro t , $\mathbf{p}_0$ é o ponto inicial (ponto de lançamento estimado inicialmente), e $\mathbf{d}$ é o vetor direção, obtido a partir da diferença entre as posições filtradas subsequentes pelo EKF.

Importante notar que o uso do EKF durante o rastreamento fornece informações iniciais cruciais para o sucesso do ML. O método que conduz ao alto desempenho do ML é, na realidade, uma combinação de EKF e ML, onde o EKF contribui na fase inicial, aprimorando a trajetória e fornecendo parâmetros essenciais, como o coeficiente de arrasto inicial para o processo de otimização. Isso indica que a eficácia do ML em estimativas precisas é potencializada pela contribuição inicial do EKF.

Nesta seção final, apresentaremos os resultados de dados simulados das análises das estimativas realizadas pelo método de Levenberg-Marquardt, comparando-os com os resultados obtidos pelo Filtro de Kalman Estendido. Durante as simulações consideramos um *ensemble* de 50 rodadas independentes. Especificamente, focaremos em quatro intervalos de rastreamento distintos: 8, 6, 4 e 2 segundos, respectivamente. Inicialmente, exibiremos imagens das trajetórias para cada um desses intervalos, proporcionando uma compreensão visual clara das diferenças nas estimativas geradas em cada caso. Em seguida, detalharemos os pontos de impacto estimados, seguidos pelas estimativas dos pontos de lançamento obtidas pelo método de Máxima Verossimilhança. Este conjunto de resultados nos permitirá avaliar a eficácia e a precisão do método de Levenberg-Marquardt para o caso avaliado.

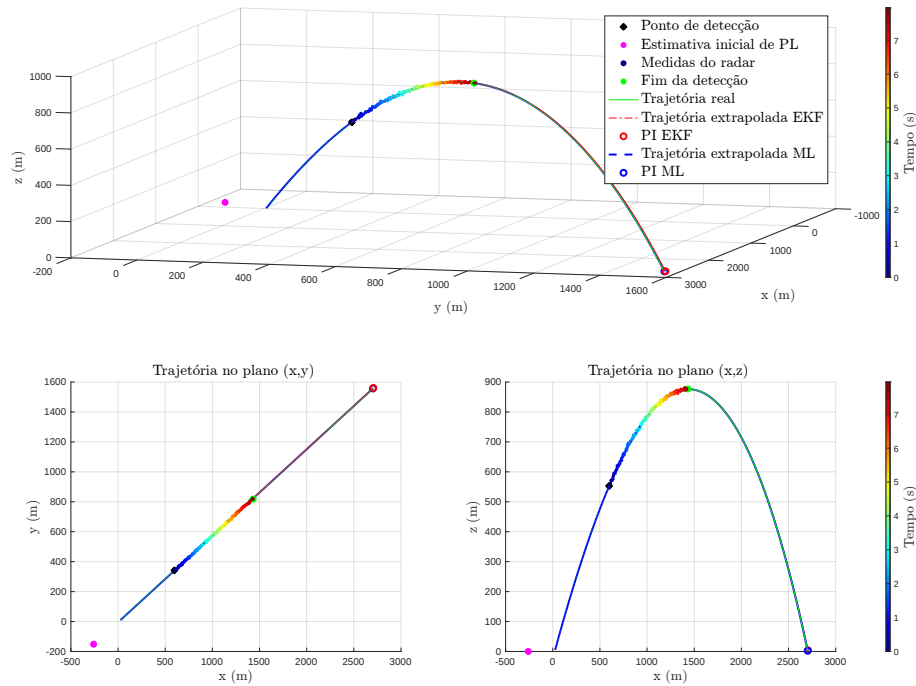


Figura 48 – Trajetórias com intervalo de rastreamento de 8 s.

Na Figura 48, é apresentado o rastreamento de um projétil ao longo de 8 segundos. A figura destaca pontos chave para entender o problema. O rastreamento começa no ponto preto, onde o projétil é inicialmente detectado. As medições do radar, cuja escala temporal está indicada à direita, são observáveis ao longo do intervalo. Após 8 segundos, a detecção se encerra. Para resolver o problema de PL, começamos com uma estimativa inicial menos precisa deste ponto, aplicando a Equação 5.1. Esta estimativa inicial é então refinada pelo algoritmo de Levenberg-Marquardt para minimizar a função custo.

Consequentemente, a imagem permite observar a trajetória real simulada do projétil, sua extrapolação antes das medições para estimar o ponto de lançamento e a extrapolação posterior para estimar o ponto de impacto utilizando tanto o Filtro de Kalman Estendido quanto o estimador de Máxima Verossimilhança.

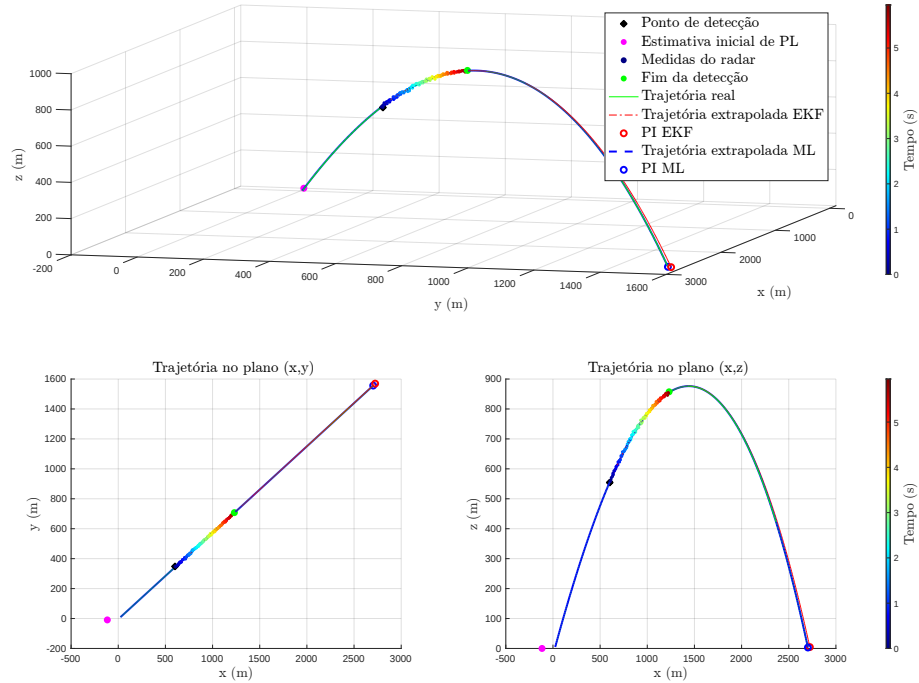


Figura 49 – Trajetórias com intervalo de rastreamento de 6 s.

A Figura 49 representa as mesmas características mencionadas acima, com a ressalva de que o intervalo correspondente ao rastreio é de 6 segundos. Diferentemente da imagem anterior, a redução do intervalo de tempo em 2 segundos já apresenta uma trajetória extrapolada para estimação de PI, pelo EKF, ligeiramente desalinhada com a trajetória real do projétil.

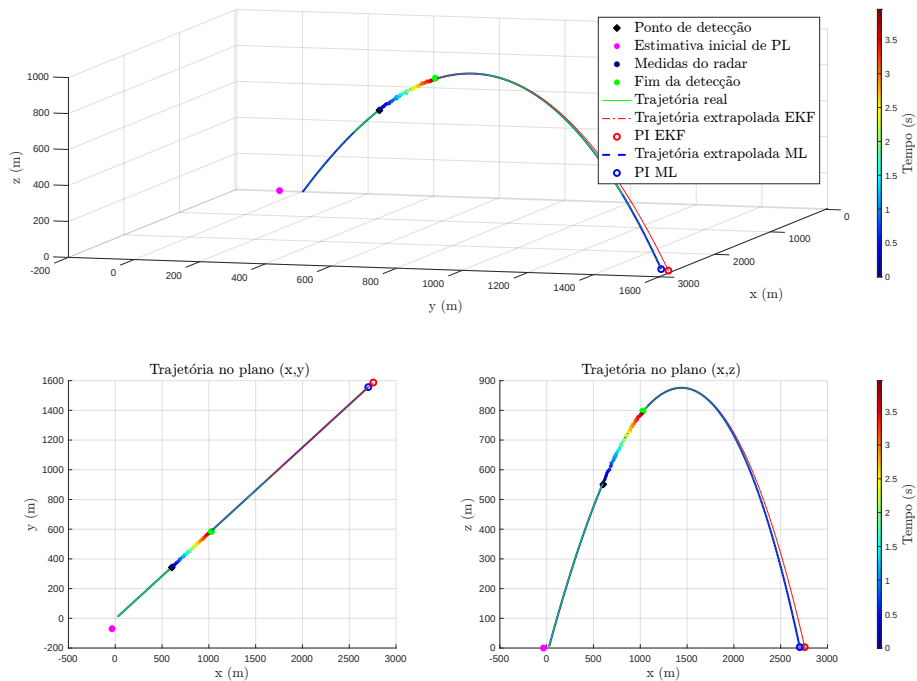


Figura 50 – Trajetórias com intervalo de rastreamento de 4 s.

Na Figura 50, correspondente ao rastreamento de 4 segundos, nota-se um aumento gradativo no erro de estimação com a redução do intervalo de rastreamento. Já na Figura 51, que apresenta um rastreamento de apenas 2 segundos, fica evidente que tal redução intensifica significativamente o erro na estimativa do ponto de impacto pelo EKF. A extrapolação retroativa feita pelo estimador ML não parece sofrer tamanha degradação nos resultados, tanto para as estimativas de ponto de lançamento quanto para o PI. As figuras subsequentes detalham mais essas simulações, revelando resultados notáveis para a estimação neste trabalho.

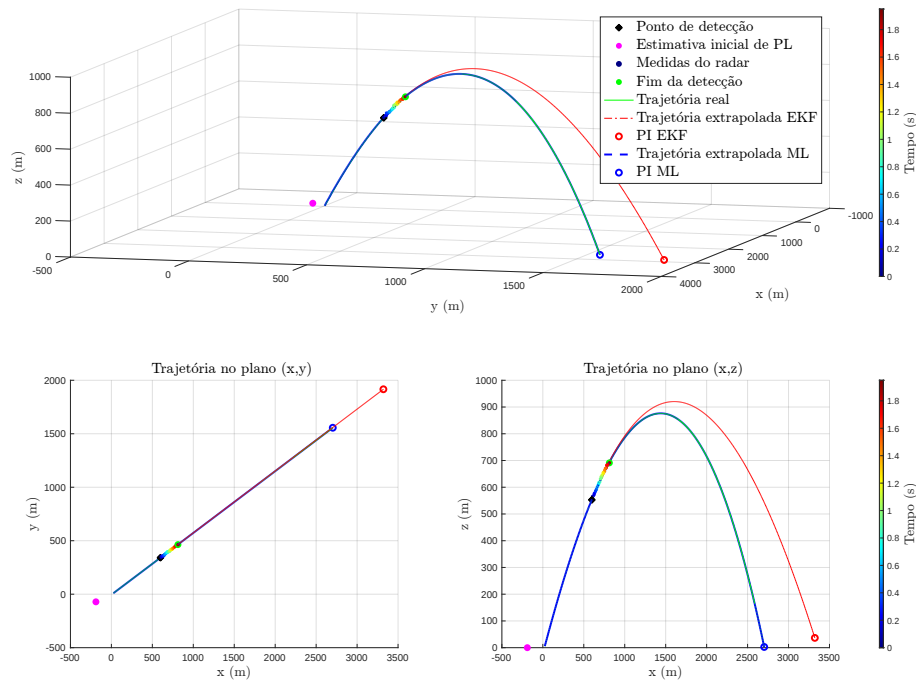


Figura 51 – Trajetórias com intervalo de rastreamento de 2 s.

Utilizando simulações de Monte Carlo, as estimativas do ponto de impacto e do ponto de lançamento apresentadas nas figuras anteriores foram realizadas para os mesmos intervalos de rastreamento de 8, 6, 4 e 2 segundos.

A. Estimativas de PI para 8 segundos: Para o intervalo de rastreamento de 8 segundos, a Figura 52 mostra as estimativas correspondentes. Na primeira imagem, a estimação do PI pelo EKF resultou em um TLE de 27,07 metros e um círculo de alerta (χ^2_2 a 99%) com um raio aproximado de 47,5 metros. Por outro lado, a estimação de PI realizada pelo estimador ML apresentou um TLE de 0,69 m e um círculo de alerta de 1,25 m. A terceira ilustração da figura apresenta uma comparação entre os dois métodos de estimação. O contraste no erro de estimação é tão significativo que as áreas de confiança, indicadas pela elipse e pelo círculo de alerta, tornam-se extremamente reduzidas, assemelhando-se a um ponto.

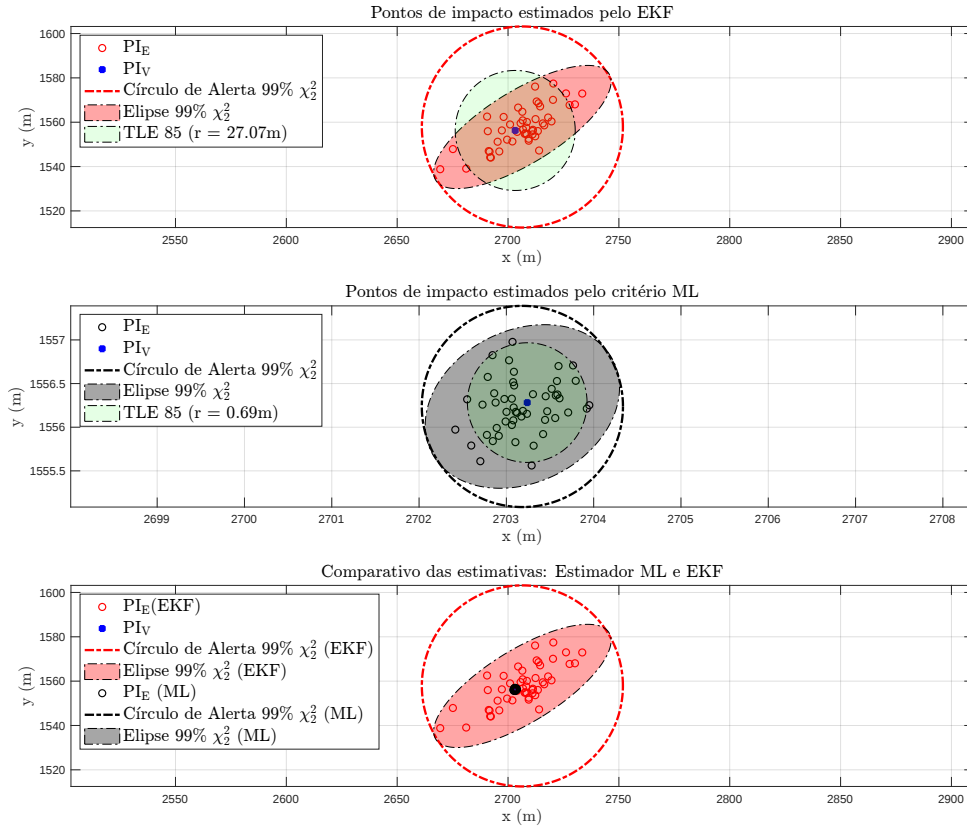


Figura 52 – Estimação de PI para intervalo de rastreamento de 8 s.

B. Estimativas de PI para 6 segundos: No cenário de 6 segundos, as estimativas são demonstradas pela Figura 53. Na primeira imagem, a aplicação do EKF para estimar o PI resultou em um TLE de 39,83 metros, além de um círculo de alerta (χ^2_2 a 99%) com raio de cerca de 70 metros, números superiores aos da estimativa de 8 segundos, como previsto. Por outro lado, a estimativa do PI pelo método ML registrou um TLE de 0,66 metros e um círculo de alerta de 1,25 metros, valores que se mostraram praticamente idênticos aos obtidos na estimativa precedente de 8 segundos.

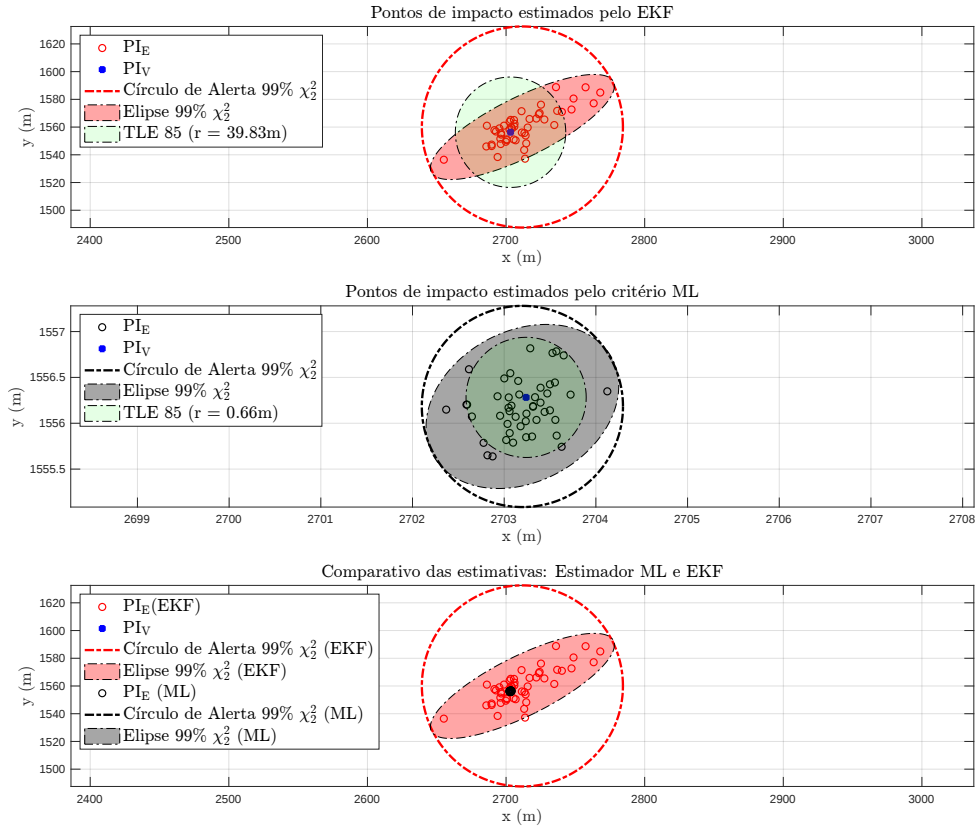


Figura 53 – Estimação de PI para intervalo de rastreamento de 6 s.

C. Estimativas de PI para 4 segundos: No intervalo de 4 segundos, foi observado por meio da Figura 54 que o EKF apresentou TLE significativamente elevado de 136,76 metros, um erro aproximadamente 340% maior do que a estimativa para 6 segundos para a estimativa do PI. O círculo de alerta correspondente (χ^2_2 a 99%) tem um raio de 185 metros. No entanto, a estimativa do PI feita pelo método ML novamente mostra um TLE muito reduzido, de apenas 0,68 metros, e um círculo de alerta de aproximadamente 1,3 metros, valores bastante similares aos das estimativas anteriores de 8 e 6 segundos.

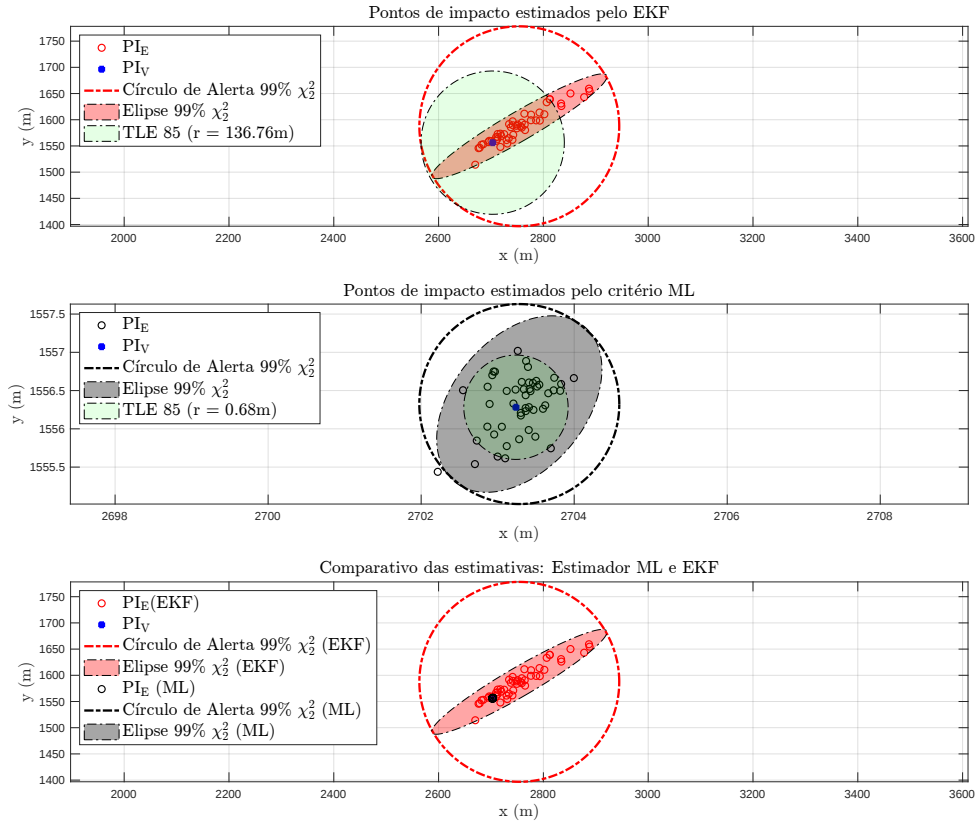


Figura 54 – Estimação de PI para intervalo de rastreamento de 4 s.

- D. Estimativas de PI para 2 segundos:** Finalmente, para o intervalo mais breve de 2 segundos, os resultados da Figura 55 mostram as estimativas encontradas. Neste caso, o Filtro de Kalman Estendido indicou um TLE para a estimativa do PI extremamente alto, chegando a 848,78 metros. O círculo de alerta relacionado (χ^2_2 a 99%) apresenta um raio muito alto, no valor de 3750 metros. Por outro lado, a estimativa do PI pelo método ML manteve um TLE muito reduzido, de somente 0,67 metros. Contudo, ao contrário das estimativas anteriores do estimador ML, o círculo de alerta desta vez aumentou para cerca de 45 metros, evidenciando o início de uma maior dispersão em alguns pontos das estimativas.

O desempenho do estimador ML contrasta com o do Filtro de Kalman Estendido (EKF). O fato fica evidenciado principalmente pelas Figuras 52 a 55, onde o TLE a 85% mantém-se estável mesmo com variações no tempo de rastreio.

Para melhorar a instabilidade no algoritmo de Levenberg-Marquardt, algumas estratégias incluem ajustar o parâmetro de amortecimento, escolher cuidadosamente o ponto inicial, implementar critérios de parada robustos, limitar o tamanho do passo, realizar análise de sensibilidade e monitorar os gradientes [43].

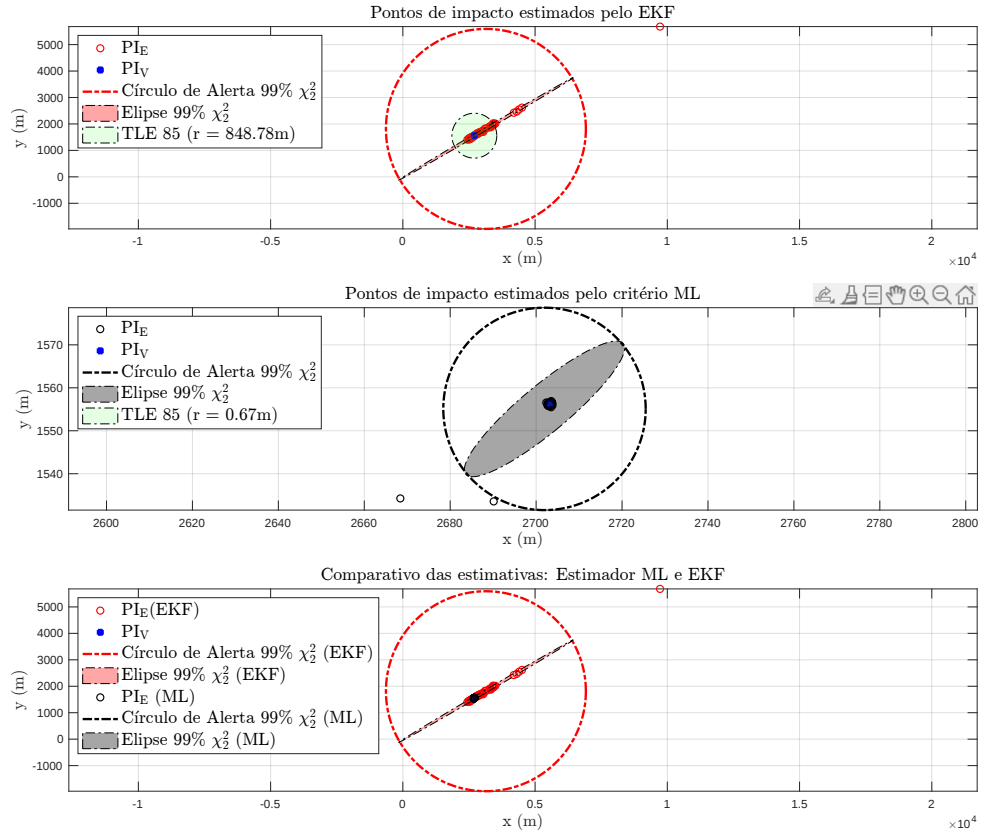


Figura 55 – Estimação de PI para intervalo de rastreamento de 2 s.

Os resultados obtidos reforçam a importância dos métodos de estimação estudados: o Filtro de Kalman Extendido e o Estimador de Máxima Verossimilhança. Como esperado, o EKF mostrou maior eficiência quando operado com medidas que servem como *feedback* para retroalimentar o filtro, sempre buscando ponderar as estimativas entre o modelo e as observações. Nas simulações realizadas, em que o projétil alcançou aproximadamente 2800m, observamos um limite para o TLE de cerca de 136m para um intervalo de rastreamento de 4 segundos e de 848m para um intervalo de 2 segundos. Conforme indicado em uma das referências do trabalho [54], erros de cerca de 10% do alcance do projétil são considerados aceitáveis para aplicações práticas. Portanto, para intervalos de rastreamento de 4 segundos ou mais, o EKF forneceu estimativas alinhadas com esta premissa.

Por outro lado, o Estimador ML demonstrou alta precisão, especialmente quando operado em conjunto com o EKF. As estimativas de PI obtidas ficaram abaixo de 1m em todos os cenários, exceto no intervalo de rastreamento mais desafiador de 2 segundos, onde ainda mantiveram boa precisão, embora tenham apresentado alguma instabilidade na operação do algoritmo de Levenberg-Marquardt, como mostra a Figura 55. Estes resultados destacam a viabilidade e eficácia desses métodos de estimação em contextos práticos, abrindo caminho para aplicações mais precisas e confiáveis em estimativas de trajetórias de projéteis.

Após apresentar as estimativas obtidas para PI através do Filtro de Kalman Estendido e estimador ML, foca-se agora nos resultados alcançados pelo método de Máxima Verossimilhança para a estimativa do ponto de lançamento. Estes resultados foram obtidos sob os mesmos cenários temporais de rastreamento, especificamente 8, 6, 4 e 2 segundos, permitindo uma comparação direta e detalhada com os resultados previamente discutidos.

E. Estimativas de PL para 8 segundos:

Inicialmente, considerando o intervalo de rastreamento de 8 segundos, o método de Máxima Verossimilhança mais uma vez revelou um erro reduzido. Neste cenário, para a estimativa do ponto de lançamento, registrou-se um valor de TLE de apenas 1,69 metros. Além disso, o círculo de alerta exibiu um raio de aproximadamente 3,1 metros, conforme figura a seguir.

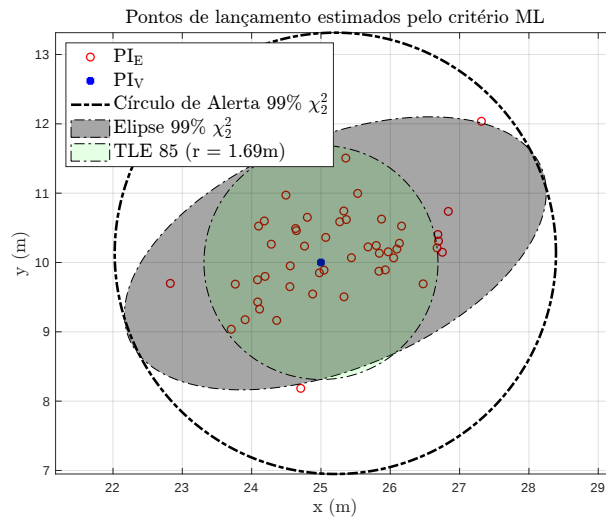


Figura 56 – Estimativa PL - Intervalo de rastreamento de 8 s.

F. Estimativas de PL para 6 segundos:

No intervalo de rastreamento de 6 segundos, o método de Máxima Verossimilhança mais uma vez evidenciou um erro pequeno como pode ser observado na Figura 57. Para o ponto de lançamento, o valor de TLE observado foi de 1,73 metros e o círculo de alerta exibiu um raio aproximado de 3,35 metros.

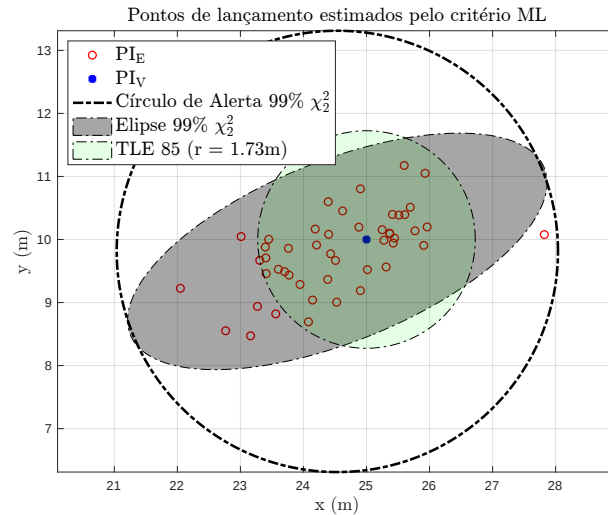


Figura 57 – Estimativa PL - Intervalo de rastreamento de 6 s.

G. Estimativas de PL para 4 segundos:

Durante o período de rastreamento de 4 segundos, o método de Máxima Verossimilhança continuou a demonstrar um erro reduzido. No caso, o valor de TLE registrado foi de 1,82 metros para o ponto de lançamento, enquanto o raio do círculo de alerta foi de aproximadamente 3,25 metros.

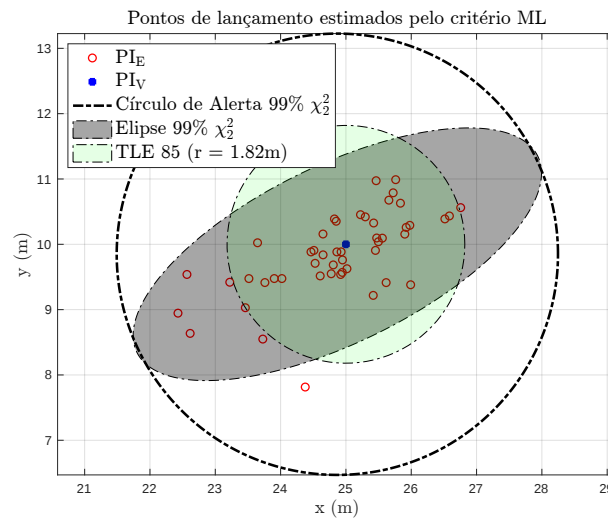


Figura 58 – Estimativa PL - Intervalo de rastreamento de 4 s.

H. Estimativas de PL para 2 segundos:

Por último, no intervalo de rastreamento de 2 segundos, o método de estimador ML demonstrou um erro pequeno, neste caso para o PL obtivemos um valor de TLE de 2,09 metros. Por outro lado, ao contrário das estimativas anteriores do estimador ML aplicado a estimação de PL, o círculo de alerta desta vez aumentou para cerca de 165 metros, evidenciando também o início de uma maior dispersão

em alguns pontos das estimativas. É importante ressaltar que um comportamento atípico também foi observado neste rastreamento de 2 segundos. Duas estimativas se desviaram significativamente, resultando em um aumento considerável da Elipse de 99%. Contudo, assim como no PI, o TLE 85% apresentou-se correto e com desempenho notável, ficando bem abaixo do requisito especificado na Tabela 1.

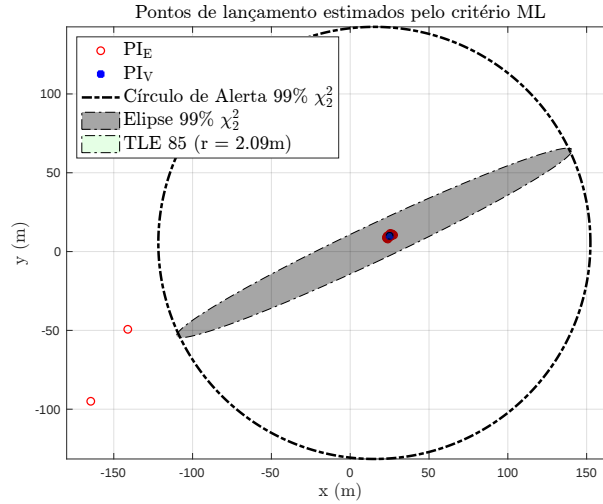


Figura 59 – Estimativa PL - Intervalo de rastreamento de 2 s.

Os resultados obtidos com o Algoritmo de Levenberg-Marquardt para a estimação do ponto de lançamento, conforme Figuras 56 a 59, demonstraram um excelente desempenho, confirmando sua eficácia esperada para as simulações realizadas. É importante destacar, no entanto, que o método utilizado para inicializar o ponto $\mathbf{p}_0 = [x_0, y_0, z_0]$ pode não ser suficiente em situações onde a detecção ocorre a uma altitude mais elevada. Nesses casos, a estimativa inicial baseada em métodos lineares pode desviar significativamente do valor real, resultando em instabilidades na solução devido a uma má inicialização. Para essas situações, funções quadráticas e um modelo de voo balístico simplificado podem ser mais adequados [2].

Por fim, é importante observar que o método de Levenberg-Marquardt empregado nestes resultados pressupõe o conhecimento prévio do tempo de disparo do projétil para realizar a sincronização entre as medidas e o modelos e calcular a função custo. Essa informação nem sempre está disponível em aplicações práticas, o que pode limitar a aplicabilidade do método em certos cenários. A reformulação do problema considerando esse tempo como uma variável a mais na otimização pode ser importante para resolução do problema de forma mais abrangente. Assim, a escolha da estratégia de inicialização e a consideração das limitações práticas são fundamentais para a aplicação efetiva do algoritmo.

5.3 Análise Comparativa dos Tempos de Processamento: EKF e Estimador ML

Foi realizada uma análise comparativa entre os algoritmos para o processamento de sinais e estimação das trajetórias envolvendo o EKF e o Estimador de Máxima Verossimilhança. Essa comparação centra-se primordialmente no desempenho do tempo de processamento de cada método, sendo um fator importante para aplicações em tempo real onde a eficiência de processamento é essencial. A Tabela 5 apresenta os tempos de execução medidos para ambos os algoritmos. Estes tempos foram contabilizados a partir do momento que se inicia os dois métodos, após a leitura dos dados medidos, ou seja, dado os respectivos intervalos de rastreamento.

Tabela 5 – Tempos de execução para o EKF e Estimador ML

Algoritmo	Tempo de Execução (s)			
	2s	4s	6s	8s
Filtro de Kalman Estendido	0,2345	0,2265	0,2312	0,2280
Estimador ML	0,3822	0,1918	0,1931	0,1912

A análise dos tempos de execução, conforme apresentada acima, mostra o desempenho dos algoritmos do EKF e Estimador ML em diferentes intervalos de rastreo. Notavelmente, o Estimador ML exibe um tempo de processamento significativamente mais elevado no menor intervalo de rastreo, 2s, com um valor de 0,3822 segundos. Este aumento pode ser atribuído ao processo de otimização intensivo exigido pelo Estimador ML. Especificamente, em intervalos menores, como o de 2 segundos, a busca pelo mínimo global envolve um conjunto de dados relativamente limitado, o que potencialmente intensifica a complexidade computacional do processo de otimização.

Por outro lado, o EKF mantém tempos de processamento relativamente estáveis ao longo de todos os intervalos de rastreo. Isso sugere uma robustez no desempenho do EKF, independentemente da quantidade de dados processados em cada intervalo. Tal característica pode ser vantajosa em aplicações que demandam confiabilidade e consistência temporal, especialmente em cenários de rastreo em tempo real.

Portanto, a escolha entre o Filtro de Kalman Estendido e o Estimador ML deve considerar não apenas a precisão desejada, mas também as demandas de tempo de processamento e a natureza dos dados disponíveis para cada intervalo específico de rastreo.

6 CONCLUSÃO

Neste estudo, voltado para a estimação de trajetórias balísticas em radares de contrabateria, investigamos e aprofundamos a compreensão na teoria de estimação envolvendo os pontos de impacto e lançamento de projéteis balísticos. O trabalho contribuiu para o esclarecimento das técnicas que podem ser aplicadas na solução dos problemas de estimativa de PL e PI. A criação e avaliação de um modelo específico que integra essas técnicas demonstraram a utilidade prática desses métodos, com potencial para aplicações com requisitos de precisão e eficiência operacional, como as exigidas pelos SRCB.

Os resultados indicam que ambos os estimadores, EKF e ML, funcionam conforme suas características intrínsecas. No entanto, o EKF apresenta limitações relacionadas à necessidade de medidas para operação recursiva, sendo o número de amostras. Um aspecto crítico do filtro é a diminuição da precisão ao longo do tempo, agravada à medida que o ponto de trajetória previsto se distancia do momento da última medição disponível no rastreamento. Esta degradação na qualidade da previsão ocorre especialmente em intervalos maiores desde a última medida do radar.

Foram examinados e foi possível contrastar diferentes métodos de modelagem para o parâmetro de arrasto, identificando qual abordagem proporciona a estimativa mais precisa para aprimorar a acurácia na determinação das trajetórias.

É essencial destacar a eficácia do estimador ML, que se mostrou notavelmente eficiente mesmo com um tempo limitado de rastreamento. É importante também enfatizar que o desempenho superior do ML foi potencializado pela utilização do EKF nas fases iniciais. O filtro não apenas aprimorou a trajetória durante o rastreamento, mas também forneceu parâmetros fundamentais, como o valor inicial para o coeficiente de arrasto, essenciais para o método combinado de EKF e ML. Portanto, a excelente performance do ML é um resultado direto dessa integração entre EKF e ML.

Por sua vez, o estimador ML, apesar de fornecer resultados excelentes, requer investigações adicionais para estimativas eficazes do ponto de lançamento, principalmente quando o momento do disparo é desconhecido. Há um potencial de melhoria, portanto, à espera de investigações posteriores para abordar o problema de sincronismo entre as medidas do radar e o modelo matemático empregado.

6.1 Contribuições para o Campo da Balística e Sistemas de Radar

Como contribuições podemos destacar a análise das estimativas realizadas utilizando dois estimadores distintos, comparando os resultados com os requisitos técnicos do Sistema

de Radar Contrabateria (SRCB) do Exército Brasileiro. Tal análise proporcionou um entendimento mais profundo sobre a aplicabilidade prática e a importância dos requisitos de projeto em situações reais. Isso nos ofereceu uma visão mais precisa sobre quais requisitos são viáveis e quais podem não estar alinhados com os resultados observados.

A implementação das medições do radar de banda C do sistema de rastreo STREV ampliou significativamente a qualidade do estudo, estabelecendo uma ligação direta com condições operacionais reais. Isso possibilitou uma avaliação mais precisa e fidedigna das estimativas de ponto de impacto realizadas pelo Filtro de Kalman, alinhando os resultados teóricos com aplicações práticas.

6.2 Recomendações e Direções Futuras para Pesquisa

Para futuras investigações, recomenda-se um estudo mais detalhado na modelagem balística de projéteis, expandindo o uso dos estimadores abordados neste trabalho a modelos mais sofisticados, como os usados em foguetes e mísseis balísticos. Nesse âmbito, fatores como as forças de arrasto aerodinâmico e gravitacional, além do empuxo do motor, são fundamentais. A trajetória desses projéteis compreende uma fase ativa, enquanto o motor está em funcionamento, seguida pela fase balística.

Avaliar modelos dinâmicos mais complexos, incluindo a adoção de abordagens como o Modelo de Múltiplas Interações (do inglês, *Interacting Multiple Model* - IMM) para a previsão da trajetória de projéteis em movimento, como, por exemplo, os mísseis. Este modelo integra diferentes métodos de estimação, adaptados para diferentes fases do movimento balístico [32] e [14].

Um desafio crucial na aplicação do método de Levenberg-Marquardt para estimar o ponto de lançamento de um projétil é a sincronização precisa entre as medidas e os modelos, dependendo do conhecimento prévio do tempo de disparo. A falta dessa informação em aplicações práticas limita a eficácia do método em certos cenários. Uma abordagem para contornar essa limitação envolve tratar o tempo de disparo como uma variável adicional na otimização, permitindo que o algoritmo estime simultaneamente o ponto de lançamento e o momento do disparo. Além disso, a exploração de estratégias de inicialização adaptativas que possam lidar com a incerteza do tempo de disparo é fundamental. Para investigações futuras, sugere-se a realização de experimentos com dados reais, alternando entre o uso e a omissão da informação do momento de disparo. Tal abordagem permitiria avaliar o impacto dessa incerteza na precisão do algoritmo e explorar métodos para mitigar seus efeitos, visando aprimorar a aplicabilidade do método em situações onde o tempo de disparo não é conhecido *a priori*.

Investigar a aplicação do método de fusão de dados através do uso do estimador ML para problemas de estimação de PL e PI. Este método é aplicado para o rastreamento

realizado por meio de múltiplos radares operando em conjunto para a reconstrução de trajetórias balísticas. A fusão de dados em radares de rastreamento, ao integrar informações de múltiplas fontes, aumenta a precisão das medições, reduzindo ruído e incertezas [2]. Esta técnica melhora a detecção e a identificação de alvos, oferece estimativas mais exatas de trajetórias e assegura maior confiabilidade e cobertura, essencial para operações em ambientes dinâmicos [58] e [59].

REFERÊNCIAS

- 1 VASTA, M.; RAMEZANI, A.; ROTHE, H. Simulation-based early prediction of rocket, artillery, and mortar trajectories and real-time optimization for counter-ram systems. *Mathematical Problems in Engineering*, Hindawi, 2017.
- 2 JANCZAK, D.; SANKOWSKI, M.; GRISHIN, Y. Measurement fusion using maximum-likelihood estimation of ballistic trajectories. *IET Radar, Sonar Navigation*, Institution of Engineering and Technology, v. 10, p. 834–843(9), June 2016. ISSN 1751-8784.
- 3 Army Technology. Radars, reconnaissance and software are shaping the artillery war in Ukraine. GlobalData, Feb 2023. Disponível em: <<https://www.army-technology.com/comment/radars-reconnaissance-and-software-are-shaping-the-artillery-war-in-ukraine/?cf-view>>.
- 4 PONOMARENKO, I. *Ukraine army tests new counter-battery radar (VIDEO) | Article*. 2019. Disponível em: <<https://www.kyivpost.com/post/8890>>.
- 5 BRASIL. Exército. *Portaria Nº 059-EME: Aprova os Requisitos Operacionais do Radar Multifunção do Sistema de Artilharia de Campanha (EB20-RO-04.027), 1ª Edição, 13 de Março, 2019*. [S.l.]: Estado-Maior do Exército, 2019. 6 p.
- 6 BRASIL. Exército. *Portaria Nº 060-EME: Aprova os Requisitos Técnicos, Logísticos e Industriais do Radar Multifunção do Sistema de Artilharia de Campanha (EB20-RO-04.027), 1ª Edição, 13 de Março, 2019*. [S.l.]: Estado-Maior do Exército, 2019. 6 p.
- 7 AIR, F. *THE TARGET LOCATION - USAF INTELLIGENCE TARGETING GUIDE*. PAMPHLET 14- 210 Intelligence, 1998. Disponível em: <<https://irp.fas.org/doddir/usaf/afpam14-210/part13.htm#page99>>.
- 8 OMNISYS, E. L. *Sensores e Soluções para Centros de Ensaios e Lançamentos*.
- 9 BRASIL, M. d. D. *Plano Estratégico do Exército 2020-2023*. [S.l.]: EME, –10. 61 p.
- 10 BRASIL, E. B. *Plano Estratégico de Ciência, Tecnologia e Inovação - PECTI (2020 - 2023)*. [S.l.]: Exército Brasileiro.
- 11 POLÍTICA NACIONAL DE DEFESA ESTRATÉGIA NACIONAL DE DEFESA. Disponível em: <https://www.gov.br/defesa/pt-br/assuntos/copy_of_estado-e-defesa/pnd_end_congresso_.pdf>.
- 12 RAVINDRA, V. C.; BAR-SHALOM, Y.; WILLETT, P. Projectile identification and impact point prediction. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, v. 46, n. 4, p. 2004–2021, 2010.
- 13 HARDIMAN, D. F.; KERCE, J. C.; BROWN, G. C. Nonlinear estimation techniques for impact point prediction of ballistic targets. In: DRUMMOND, O. E. (Ed.). *Signal and Data Processing of Small Targets 2006*. [S.l.]: SPIE, 2006.
- 14 FARINA, A.; TIMMONERI, L.; VIGILANTE, D. Classification and launch-impact point prediction of ballistic target via multiple model maximum likelihood estimator (mm-mle). In: . [S.l.: s.n.], 2006. v. 2006, p. 5 pp. ISBN 0-7803-9496-8.

- 15 MARCIANO, P.; APOLINARIO, J.; SILVA, J. Estimação e extrapolação de parâmetros de projéteis balísticos a partir de medidas radar. In: *XLI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações e Processamento de Sinais*. SP: SBrT, 2023.
- 16 MCCOY, R. L. *Modern Exterior Ballistics The Launch and Flight Dynamics of Symmetric Projectiles*. first. Atglen, PA: Schiffer Publishing, 1999.
- 17 BATE, R. R.; MUELLER, D. D.; WHITE, J. E. *Fundamentals of Astrodynamics*. New York: Dover Publications, 1971.
- 18 KINSLER, L. E. *Fundamentals of acoustics*. 4th. ed. New York: Wiley, 2000. ISBN 0471847895.
- 19 CARLUCCI, S. S. J. D. E. *Ballistics Theory and Design of Guns and Ammunition, Third Edition*. Boca Raton: CRC Press, 2017.
- 20 REGAN, F. J. *Dynamics of Atmospheric Re-Entry*. [S.l.]: American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA), 1993.
- 21 CAYWOOD, W. C.; RIVELLO, R. M.; WECKESSER, L. B. Tactical missile structures and materials technology. *The APL Technical Digest*, v. 4, n. 3, p. p. 166–174, 1983.
- 22 PRODUCTS, A. T. S. *Projectile Rocket Ordnance Design and Analysis System PRO-DAS V. 3.5*. [S.l.], 2013.
- 23 FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; EMAMI-NAEINI, A. *Feedback control of dynamic systems*. Eighth edition. NY: Pearson NY, NY, 2019. ISBN 9780134685717; 0134685717.
- 24 LI, X. R.; JILKOV, V. P. Survey of Maneuvering Target Tracking - Part II: Motion Models of Ballistic and Space Targets. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, v. 46, n. 1, p. p. 96–119, 2010.
- 25 LARSON, R. E.; DRESSLER, R. M.; RATNER, R. S. *Application of the extended Kalman filter to ballistic trajectory estimation*. [S.l.], 1967.
- 26 SIOURIS, G.; CHEN, G.; WANG, J. Tracking an incoming ballistic missile using an extended interval Kalman filter. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, v. 33, n. 1, p. p. 232–240, Jan 1997.
- 27 LI, X. R.; JILKOV, V. P. Survey of maneuvering target tracking: III. Measurement models. In: DRUMMOND, O. E. (Ed.). *Signal and Data Processing of Small Targets 2001*. [S.l.]: SPIE, 2001. v. 4473, p. p. 423 – 446.
- 28 TORGE, W. *Geodesy*. [S.l.]: W. de Gruyter, 2001. ISBN 9783110170726.
- 29 RICHARDS, M.; SCHEER, J.; HOLM, W. *Principles of Modern Radar - Volume 1: Basic Principles*. [S.l.]: SciTech Publishing, Incorporated, 2010.
- 30 SIMON, D. *Optimal State Estimation: Kalman, H. and Nonlinear Approaches*. [S.l.]: John Wiley Sons, Inc., 2006. ISBN 9780471708582.
- 31 WELCH, G.; BISHOP, G. *An Introduction to the Kalman Filter*. [S.l.: s.n.], 2006.
- 32 BAR-SHALOM, Y.; KIRUBARAJAN, T.; LI, X.-R. *Estimation with Applications to Tracking and Navigation*. USA: John Wiley Sons, Inc., 2002. ISBN 0471221279.

- 33 ALBUQUERQUE, J.; FORTES, J.; FINAMORE, W. *Probabilidade, Variáveis Aleatórias e Processos Estocásticos*. 2. ed. RJ: Interciência, 2018. ISBN 978-8571934108.
- 34 OLIVEIRA, J. R. P. d. *Acompanhamento de Alvos-Radar Utilizando Filtragem de Kalman e Vetor de Estados com Dimensão Variável*. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação de Engenharia, COPPE/UFRJ, 2005.
- 35 PAVLOVIĆ, M.; BANJAC, Z.; KOVAČEVIĆ, B. Approximate Kalman filtering by both m-robustified dynamic stochastic approximation and statistical linearization methods. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, v. 2023, n. 1, p. p. 69, 2023.
- 36 MARELLI, D. E.; SUI, T.; ROHR, E. R.; FU, M. Stability of Kalman filtering with a random measurement equation: Application to sensor scheduling with intermittent observations. *Automatica*, v. 99, p. p. 390–402, 2019. ISSN 0005-1098.
- 37 KALMANEST., T.; BONNABEL, S.; MOULINES, E.; SÄRKKÄ, S. *On stability of a class of filters for non-linear stochastic systems*. 2018.
- 38 Van Tress, H. L. B.; Kristine L. Zhi, T. *Detection, Estimation, and Modulation Theory Part I*. Second ed. [S.l.]: John Wiley Sons, Inc., Hoboken, 2013.
- 39 FIEEEE, A.; IMMEDIATA, S.; TIMMONERI, L.; MELONI, M.; VIGILANTE, D. Comparison of recursive and batch processing for impact point prediction of ballistic targets. p. 121–126, 2005.
- 40 LIH, Y.; KIRUBARAJAN, T.; SHALOM, Y. bar; YEDDANAPUDI, M. Trajectory and launch point estimation for ballistic missiles from boost phase los measurements. In: . [S.l.: s.n.], 1999. v. 4, p. 425 – 442 vol.4. ISBN 0-7803-5425-7.
- 41 GOLDBERG, D. *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*. [S.l.]: Addison-Wesley, 1989. (Addison Wesley series in artificial intelligence). ISBN 9780201157673.
- 42 MADSEN, K.; NIELSEN, H.; TINGLEFF, O. Methods for non-linear least squares problems (2nd ed.). p. p. 17–28, 2004.
- 43 GAVIN, H. P. The levenberg-marquardt algorithm for nonlinear least squares curve-fitting problems. 2019.
- 44 BJÖRCK, Å. *Numerical Methods for Least Squares Problems*. [S.l.]: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1996.
- 45 MARQUARDT, D. W. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, v. 11, n. 2, p. p. 431–441, 1963.
- 46 Alan V. Oppenheim Ronald W. Schafer. *Discrete-Time Signal Processing*. Third edit. USA: Prentice Hall, 2014. ISBN 9785984520973.
- 47 MEHRA, R. K. A comparison of several nonlinear filters for re-entry vehicle tracking. In: *IEEE Symposium on Adaptive Processes (9th) Decision and Control*. [S.l.: s.n.], 1970. p. 194.

- 48 REALI, F.; PALMERINI, G.; FARINA, A.; GRAZIANO, A.; TIMMONERI, L. Tracking a ballistic target by multiple model approach. 2009.
- 49 FARINA, A.; RISTIC, B.; BENVENUTI, D. Tracking a ballistic target: comparison of several nonlinear filters. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, v. 38, n. 3, p. 854–867, 2002.
- 50 GERALD, C.; WHEATLEY, P. *Applied Numerical Analysis*. [S.l.]: Pearson/Addison-Wesley, 2004. (Featured Titles for Numerical Analysis). ISBN 9780321133045.
- 51 COSTA, P. Adaptive model architecture and extended kalman-bucy filters. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, v. 30, n. 2, p. p. 525–533, 1994.
- 52 RISTIC, B.; ARULAMPALAM, S.; GORDON, N. *Beyond the Kalman Filter: Particle Filters for Tracking Applications*. [S.l.]: Artech House, 2004. (Artech House radar library). ISBN 9781580536318.
- 53 LAHAV, A.; TALMON, R.; KLUGER, Y. Mahalanobis distance informed by clustering. *Information and Inference: A Journal of the IMA*, v. 8, n. 2, p. 377–406, 08 2018. ISSN 2049-8772.
- 54 YUAN, T.; BAR-SHALOM, Y.; WILLETT, P.; HARDIMAN, D. Impact point prediction for thrusting projectiles in the presence of wind. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, v. 50, n. 1, p. p. 102–119, 2014.
- 55 YUAN, T.; BAR-SHALOM, Y.; WILLETT, P.; MOZESON, E.; POLLAK, S.; HARDIMAN, D. A multiple IMM estimation approach with unbiased mixing for thrusting projectiles. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, v. 48, n. 4, p. p. 3250–3267, 2012.
- 56 BROWNLOW, J. *Analysis of Target Location Error*. 2022. Defense Technical Information Center. Disponível em: <<https://apps.dtic.mil/sti/citations/AD1158329>>.
- 57 PRESS, W. H.; TEUKOLSKY, S. A.; VETTERLING, W. T.; FLANNERY, B. P. *Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing*. 3. ed. USA: Cambridge University Press, 2007. ISBN 0521880688.
- 58 KHUDOV, H.; YUZOVA, I.; LISOHORSKYI, B.; SOLOMONENKO, Y.; MYKUS, S.; IRKHA, A.; ONISHCHUK, V.; SUKONKO, S.; SEMIV, G.; BONDARENKO, S. Development of methods for determining the coordinates of firing positions of roving mortars by a network of counter-battery radars. *EUREKA: Physics and Engineering*, n. 3, p. p.140–150, May 2021.
- 59 KHUDOV, H.; ZVONKO, A.; LISOHORSKYI, B.; SOLOMONENKO, Y.; MYNKO, P.; GLUKHOV, S.; IRKHA, A.; LISHCHENKO, V.; MISHCHENKO, Y.; KHUDOV, V. Development of a rangefinding method for determining the coordinates of targets by a network of radar stations in counter-battery warfare. *EUREKA: Physics and Engineering*, n. 3, p. p.121–132, May 2022.

APÊNDICE A – LINEARIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DE ESTADOS EKF

A estrutura da matriz Jacobiana, conforme delineada na Equação (4.28), é caracterizada por:

$$\mathbf{f}_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} & f_{45} & f_{46} & f_{47} \\ f_{51} & f_{52} & f_{53} & f_{54} & f_{55} & f_{56} & f_{57} \\ f_{61} & f_{62} & f_{63} & f_{64} & f_{65} & f_{66} & f_{67} \\ f_{71} & f_{72} & f_{73} & f_{74} & f_{75} & f_{76} & f_{77} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

O cálculo dos elementos não nulos de $\mathbf{f}_x$ são realizados conforme abaixo.

$$f_{41} = \frac{\partial \ddot{x}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(P\alpha\dot{x}) = \dot{x} \left(\alpha \frac{\partial P}{\partial x} + P \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right) \quad (\text{A.2})$$

$$f_{42} = \frac{\partial \ddot{x}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(P\alpha\dot{x}) = \dot{x} \left(\alpha \frac{\partial P}{\partial y} + P \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) \quad (\text{A.3})$$

$$f_{43} = \frac{\partial \ddot{x}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(P\alpha\dot{x}) = \dot{x} \left(\alpha \frac{\partial P}{\partial z} + P \frac{\partial \alpha}{\partial z} \right) \quad (\text{A.4})$$

$$f_{44} = \frac{\partial \ddot{x}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}}(P\alpha\dot{x}) = \alpha \left(P + \dot{x} \frac{\partial P}{\partial \dot{x}} \right) \quad (\text{A.5})$$

$$f_{45} = \frac{\partial \ddot{x}}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial}{\partial \dot{y}}(P\alpha\dot{x}) = \dot{x} \alpha \frac{\partial P}{\partial \dot{y}} \quad (\text{A.6})$$

$$f_{46} = \frac{\partial \ddot{x}}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial}{\partial \dot{z}}(P\alpha\dot{x}) = \dot{x} \alpha \frac{\partial P}{\partial \dot{z}} \quad (\text{A.7})$$

$$f_{47} = \frac{\partial \ddot{x}}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}(P\alpha\dot{x}) = \dot{x} P \quad (\text{A.8})$$

$$f_{51} = \frac{\partial \ddot{y}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(P\alpha\dot{y}) = \dot{y} \left(\alpha \frac{\partial P}{\partial x} + P \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right) \quad (\text{A.9})$$

$$f_{52} = \frac{\partial \ddot{y}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(P\alpha\dot{y}) = \dot{y} \left(\alpha \frac{\partial P}{\partial y} + P \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) \quad (\text{A.10})$$

$$f_{53} = \frac{\partial \ddot{y}}{\partial z} = \dot{y} \left(\alpha \frac{\partial P}{\partial z} + P \frac{\partial \alpha}{\partial z} \right) \quad (\text{A.11})$$

$$f_{54} = \frac{\partial \ddot{y}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}}(P\alpha\dot{y}) = \dot{y}\alpha \frac{\partial P}{\partial \dot{x}} \quad (\text{A.12})$$

$$f_{55} = \frac{\partial \ddot{y}}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial}{\partial \dot{y}}(P\alpha\dot{y}) = \alpha \left(P + \dot{y} \frac{\partial P}{\partial \dot{y}} \right) \quad (\text{A.13})$$

$$f_{56} = \frac{\partial \ddot{y}}{\partial \dot{z}} = \dot{y}\alpha \frac{\partial P}{\partial \dot{z}} \quad (\text{A.14})$$

$$f_{57} = \frac{\partial \ddot{y}}{\partial \alpha} = \dot{y}P \quad (\text{A.15})$$

$$f_{61} = \frac{\partial \ddot{z}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(P\alpha\dot{z} - g) = \dot{z} \left(\alpha \frac{\partial P}{\partial x} + P \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right) \quad (\text{A.16})$$

$$f_{62} = \frac{\partial \ddot{z}}{\partial y} = \dot{z} \left(\alpha \frac{\partial P}{\partial y} + P \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) \quad (\text{A.17})$$

$$f_{63} = \frac{\partial \ddot{z}}{\partial z} = \dot{z} \left(\alpha \frac{\partial P}{\partial z} + P \frac{\partial \alpha}{\partial z} \right) \quad (\text{A.18})$$

$$f_{64} = \frac{\partial \ddot{z}}{\partial \dot{x}} = \dot{z}\alpha \frac{\partial P}{\partial \dot{x}} \quad (\text{A.19})$$

$$f_{65} = \frac{\partial \ddot{z}}{\partial \dot{y}} = \dot{z}\alpha \frac{\partial P}{\partial \dot{y}} \quad (\text{A.20})$$

$$f_{66} = \frac{\partial \ddot{z}}{\partial \dot{z}} = P\alpha + \dot{z}\alpha \frac{\partial P}{\partial \dot{z}} \quad (\text{A.21})$$

$$f_{67} = \frac{\partial \ddot{z}}{\partial \alpha} = \dot{z}P \quad (\text{A.22})$$

Os elementos da linha 7 são nulos uma vez que são considerados localmente constantes.

A derivação parcial de P em relação a x y e z é dada por:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{2}\rho(z)V \right) = 0 \quad (\text{A.23})$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{1}{2}\rho(z)V \right) = 0 \quad (\text{A.24})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{1}{2}\rho(z)V \right) = -\frac{1}{2}V \frac{\partial}{\partial z}(\rho(z)) \\ &= -\frac{1}{2}V \left[\rho_0 e^{-zh}(-h) \right] = \frac{1}{2}hV\rho(z) = -Ph \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

A derivação parcial de P em relação a $\dot{x}$ $\dot{y}$ e $\dot{z}$ é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \dot{x}} &= -\frac{1}{2}\rho(z) \frac{\partial V}{\partial \dot{x}} = -\frac{1}{2}\rho(z) \left[\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{-1/2} 2\dot{x} \right] \\ &= -\frac{\rho(z)}{2} \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} = \dot{x} \frac{P}{V^2} \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

De forma análoga temos que:

$$\frac{\partial P}{\partial \dot{y}} = \dot{y} \frac{P}{V^2} \quad (\text{A.27})$$

$$\frac{\partial P}{\partial \dot{z}} = \dot{z} \frac{P}{V^2} \quad (\text{A.28})$$

A matriz Jacobiana fica da seguinte forma:

$$\mathbf{f}_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & f_{43} & f_{44} & f_{45} & f_{46} & f_{47} \\ 0 & 0 & f_{53} & f_{54} & f_{55} & f_{56} & f_{57} \\ 0 & 0 & f_{63} & f_{64} & f_{65} & f_{66} & f_{67} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.29})$$

Considerando a matriz denominada de $\mathbf{f}'_x$, como sendo:

$$\mathbf{f}'_x = \begin{bmatrix} f_{43} & f_{44} & f_{45} & f_{46} & f_{47} \\ f_{53} & f_{54} & f_{55} & f_{56} & f_{57} \\ f_{63} & f_{64} & f_{65} & f_{66} & f_{67} \end{bmatrix} \quad (\text{A.30})$$

A forma final da matriz da Equação (A.30) é

$$\mathbf{f}'_x = \begin{bmatrix} -\dot{x}\alpha Ph & \alpha P \left(1 + \left(\frac{\dot{x}}{V}\right)^2\right) & \dot{x}\dot{y}\alpha \frac{P}{V^2} & \dot{x}\dot{z}\alpha \frac{P}{V^2} & \dot{x}P \\ -\dot{y}\alpha Ph & \dot{x}\dot{y}\alpha \frac{P}{V^2} & \alpha P \left(1 + \left(\frac{\dot{y}}{V}\right)^2\right) & \dot{y}\dot{z}\alpha \frac{P}{V^2} & \dot{y}P \\ -\dot{z}\alpha Ph & \dot{x}\dot{z}\alpha \frac{P}{V^2} & \dot{y}\dot{z}\alpha \frac{P}{V^2} & \alpha P \left(1 + \left(\frac{\dot{z}}{V}\right)^2\right) & \dot{z}P \end{bmatrix} \quad (\text{A.31})$$

APÊNDICE B – LINEARIZAÇÃO β_0 -EKF

Para o cálculo da matriz Jacobiana $\mathbf{f}_x$, é novamente aplicada a definição conforme a Equação (4.11). Neste caso, temos que a matriz é representada pela Equação (4.13) e os elementos da Equação (4.14) são calculados abaixo:

$$f_{43} = \frac{\partial \ddot{x}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{P}{\beta_0} \left(1 - \frac{\Delta\beta}{\beta_0} \right) \dot{x} \right] = -\dot{x} \frac{Ph}{\beta_0} \left(1 - \frac{\Delta\beta}{\beta_0} \right) \quad (\text{B.1})$$

$$f_{44} = \frac{\partial \ddot{x}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left[\frac{P}{\beta_0} \left(1 - \frac{\Delta\beta}{\beta_0} \right) \dot{x} \right] = \frac{1}{\beta_0} \left(1 - \frac{\Delta\beta}{\beta_0} \right) \left(P + \frac{\dot{x}^2}{V^2} P \right) \quad (\text{B.2})$$

$$f_{45} = \frac{\partial \ddot{x}}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \left[\frac{P}{\beta_0} \left(1 - \frac{\Delta\beta}{\beta_0} \right) \dot{x} \right] = \frac{\dot{x}\dot{y}}{\beta_0} \left(1 - \frac{\Delta\beta}{\beta_0} \right) \frac{P}{V^2} \quad (\text{B.3})$$

$$f_{46} = \frac{\partial \ddot{x}}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial}{\partial \dot{z}} \left[\frac{P}{\beta_0} \left(1 - \frac{\Delta\beta}{\beta_0} \right) \dot{x} \right] = \frac{\dot{x}\dot{z}}{\beta_0} \left(1 - \frac{\Delta\beta}{\beta_0} \right) \frac{P}{V^2} \quad (\text{B.4})$$

$$f_{47} = \frac{\partial \ddot{x}}{\partial(\Delta\beta)} = \frac{\partial}{\partial(\Delta\beta)} \left[\frac{P}{\beta_0} \left(1 - \frac{\Delta\beta}{\beta_0} \right) \dot{x} \right] = -\frac{\dot{x}P}{\beta_0^2} \quad (\text{B.5})$$

$$f_{53} = \frac{\partial \ddot{y}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{P}{\beta_0} \left(1 - \frac{\Delta\beta}{\beta_0} \right) \dot{y} \right) = -\frac{\dot{y}Ph}{\beta_0} \left(1 - \frac{\Delta\beta}{\beta_0} \right) \quad (\text{B.6})$$

$$f_{54} = \frac{\partial \ddot{y}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(\frac{P}{\beta_0} \left(1 - \frac{\Delta\beta}{\beta_0} \right) \dot{y} \right) = \dot{x} \frac{\dot{y}P}{\beta_0 V^2} \left(1 - \frac{\Delta\beta}{\beta_0} \right) \quad (\text{B.7})$$

$$f_{55} = \frac{\partial \ddot{y}}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \left(\frac{P}{\beta_0} \left(1 - \frac{\Delta\beta}{\beta_0} \right) \dot{y} \right) = \frac{P}{\beta_0} \left(1 - \frac{\Delta\beta}{\beta_0} \right) + \frac{\dot{y}^2 P}{\beta_0 V^2} \left(1 - \frac{\Delta\beta}{\beta_0} \right) \quad (\text{B.8})$$

$$= \frac{P}{\beta_0} \left(1 + \frac{\dot{y}^2}{V^2} \right) \left(1 - \frac{\Delta\beta}{\beta_0} \right) \quad (\text{B.9})$$

$$f_{56} = \frac{\partial \ddot{y}}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial}{\partial \dot{z}} \left(\frac{P}{\beta_0} \left(1 - \frac{\Delta\beta}{\beta_0} \right) \dot{y} \right) = \frac{\dot{y}\dot{z}P}{\beta_0 V^2} \left(1 - \frac{\Delta\beta}{\beta_0} \right) \quad (\text{B.10})$$

$$f_{57} = \frac{\partial \ddot{y}}{\partial(\Delta\beta)} = \frac{\partial}{\partial(\Delta\beta)} \left(\frac{P}{\beta_0} \left(1 - \frac{\Delta\beta}{\beta_0} \right) \dot{y} \right) = -\frac{\dot{y}P}{\beta_0^2} \quad (\text{B.11})$$

$$f_{63} = \frac{\partial \ddot{z}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{P}{\beta_0} \left(1 - \frac{\Delta\beta}{\beta_0} \right) \dot{z} - g \right) = -\frac{\dot{z}Ph}{\beta_0} \left(1 - \frac{\Delta\beta}{\beta_0} \right) \quad (\text{B.12})$$

$$f_{64} = \frac{\partial \ddot{z}}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{z}}{\beta_0} \left(1 - \frac{\Delta\beta}{\beta_0} \right) \frac{\dot{x}P}{V^2} = \frac{\dot{x}\dot{z}P}{\beta_0 V^2} \left(1 - \frac{\Delta\beta}{\beta_0} \right) \quad (\text{B.13})$$

$$f_{65} = \frac{\partial \ddot{z}}{\partial \dot{y}} = \frac{\dot{y}\dot{z}P}{\beta_0 V^2} \left(1 - \frac{\Delta\beta}{\beta_0} \right) \quad (\text{B.14})$$

$$f_{66} = \frac{\partial \ddot{z}}{\partial \dot{z}} = \frac{P}{\beta_0} \left(1 - \frac{\Delta\beta}{\beta_0} \right) + \frac{\dot{z}}{\beta_0} \left(1 - \frac{\Delta\beta}{\beta_0} \right) \frac{\dot{z}P}{V^2} \quad (\text{B.15})$$

$$= \frac{P}{\beta_0} \left(1 + \frac{\dot{z}^2}{V^2} \right) \left(1 - \frac{\Delta\beta}{\beta_0} \right) \quad (\text{B.16})$$

$$f_{67} = \frac{\partial \ddot{z}}{\partial (\Delta\beta)} = \frac{P\dot{z}}{\beta_0} \left(-\frac{1}{\beta_0} \right) = -\frac{\dot{z}P}{\beta_0^2} \quad (\text{B.17})$$

APÊNDICE C – LINEARIZAÇÃO e -EKF

O cálculo da matriz Jacobiana $\mathbf{f}_x$, é novamente aplicada à definição conforme a Equação (4.11). Os elementos da Equação (4.14) são calculados abaixo:

$$f_{43} = \frac{\partial \ddot{x}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (P\alpha_0 e^d \dot{x}) = -\dot{x}Ph\alpha_0 e^d \quad (C.1)$$

$$f_{44} = \frac{\partial \ddot{x}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}} (P\alpha_0 e^d \dot{x}) = \alpha_0 e^d \left(P + \frac{\dot{x}^2 P}{V^2} \right) = P\alpha_0 e^d \left(1 + \frac{\dot{x}^2}{V^2} \right) \quad (C.2)$$

$$f_{45} = \frac{\partial \ddot{x}}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial}{\partial \dot{y}} (P\alpha_0 e^d \dot{x}) = \dot{x}\dot{y}\alpha_0 e^d \frac{P}{V^2} \quad (C.3)$$

$$f_{46} = \frac{\partial \ddot{x}}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial}{\partial \dot{z}} (P\alpha_0 e^d \dot{x}) = \dot{x}\dot{z}\alpha_0 e^d \frac{P}{V^2} \quad (C.4)$$

$$f_{47} = \frac{\partial \ddot{x}}{\partial d} = \frac{\partial}{\partial d} (P\alpha_0 e^d \dot{x}) = P\alpha_0 \dot{x} e^d \quad (C.5)$$

$$f_{53} = \frac{\partial \ddot{y}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (P\alpha_0 e^d \dot{y}) = \dot{y}\alpha_0 e^d \frac{\partial P}{\partial z} = -\dot{y}Ph\alpha_0 e^d \quad (C.6)$$

$$f_{54} = \frac{\partial \ddot{y}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}} (P\alpha_0 e^d \dot{y}) = \frac{\dot{x}\dot{y}\alpha_0 e^d P}{V^2} \quad (C.7)$$

$$f_{55} = \frac{\partial \ddot{y}}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial}{\partial \dot{y}} (P\alpha_0 e^d \dot{y}) = \alpha_0 e^d \left(P + \dot{y}^2 \frac{P}{V^2} \right) = \alpha_0 e^d P \left(1 + \frac{\dot{y}^2}{V^2} \right) \quad (C.8)$$

$$f_{56} = \frac{\partial \ddot{y}}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial}{\partial \dot{z}} (P\alpha_0 e^d \dot{y}) = \alpha_0 e^d \dot{y} \frac{\partial P}{\partial \dot{z}} = \dot{y}\dot{z}\alpha_0 e^d \frac{P}{V^2} \quad (C.9)$$

$$f_{57} = \frac{\partial \ddot{y}}{\partial d} = \frac{\partial}{\partial d} (P\alpha_0 e^d \dot{y}) = P\alpha_0 \dot{y} e^d \quad (C.10)$$

$$f_{63} = \frac{\partial \ddot{z}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (P\alpha_0 e^d \dot{z} - g) = \dot{z}\alpha_0 e^d \frac{\partial P}{\partial z} = -\dot{z}\alpha_0 e^d Ph \quad (C.11)$$

$$f_{64} = \frac{\partial \ddot{z}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}} (P\alpha_0 e^d \dot{z} - g) = \alpha_0 e^d \dot{z} \frac{\partial P}{\partial \dot{z}} = \frac{\dot{x}\dot{z}\alpha_0 e^d P}{V^2} \quad (C.12)$$

$$f_{65} = \frac{\partial \ddot{z}}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial}{\partial \dot{y}} (P\alpha_0 e^d \dot{z} - g) = \dot{y}\dot{z}\alpha_0 e^d \frac{P}{V^2} \quad (C.13)$$

$$f_{66} = \frac{\partial \ddot{z}}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial}{\partial \dot{z}} (P\alpha_0 e^d \dot{z} - g) = P\alpha_0 e^d \left(1 + \frac{\dot{z}^2}{V^2} \right) \quad (C.14)$$

$$f_{67} = \frac{\partial \ddot{z}}{\partial d} = \frac{\partial}{\partial d} (P\alpha_0 e^d \dot{z} - g) = P\alpha_0 e^d \dot{z} \quad (C.15)$$

APÊNDICE D – LINEARIZAÇÃO γ -EKF

A matriz Jacobiana da Equação (4.28) fica da seguinte forma:

$$\mathbf{f}_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} & f_{45} & f_{46} & f_{47} \\ f_{51} & f_{52} & f_{53} & f_{54} & f_{55} & f_{56} & f_{57} \\ f_{61} & f_{62} & f_{63} & f_{64} & f_{65} & f_{66} & f_{67} \\ f_{71} & f_{72} & f_{73} & f_{74} & f_{75} & f_{76} & f_{77} \end{bmatrix} \quad (\text{D.1})$$

O cálculo destes elementos são realizados conforme abaixo:

$$f_{41} = \frac{\partial \ddot{x}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{2} \gamma V \dot{x} \right) = 0 \quad (\text{D.2})$$

$$f_{42} = \frac{\partial \ddot{x}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{1}{2} \gamma V \dot{x} \right) = 0 \quad (\text{D.3})$$

$$f_{43} = \frac{\partial \ddot{x}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{1}{2} \gamma V \dot{x} \right) = -\frac{1}{2} \dot{x} V \frac{\partial \gamma}{\partial z} = -\frac{1}{2} \dot{x} V \alpha(-h\rho(z)) \quad (\text{D.4})$$

$$= \frac{1}{2} \dot{x} V h \gamma \quad (\text{D.5})$$

$$f_{44} = \frac{\partial \ddot{x}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(-\frac{1}{2} \gamma V \dot{x} \right) = -\frac{1}{2} \gamma \left(V \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{x}} + \dot{x} \frac{\partial V}{\partial \dot{x}} \right) \quad (\text{D.6})$$

$$= -\frac{1}{2} \gamma \left(V + \frac{\dot{x}^2}{V} \right) \quad (\text{D.7})$$

$$f_{45} = \frac{\partial \ddot{x}}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \left(-\frac{1}{2} \gamma V \dot{x} \right) = -\frac{1}{2} \gamma \dot{x} \frac{\partial V}{\partial \dot{y}} = -\frac{1}{2} \gamma \frac{\dot{x} \dot{y}}{V} \quad (\text{D.8})$$

$$f_{46} = \frac{\partial \ddot{x}}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial}{\partial \dot{z}} \left(-\frac{1}{2} \gamma V \dot{x} \right) = -\frac{1}{2} \gamma \dot{x} \frac{\partial V}{\partial \dot{z}} = -\frac{1}{2} \gamma \frac{\dot{x} \dot{z}}{V} \quad (\text{D.9})$$

$$f_{47} = \frac{\partial \ddot{x}}{\partial \gamma} = \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(-\frac{1}{2} \gamma V \dot{x} \right) = -\frac{1}{2} V \dot{x} \quad (\text{D.10})$$

$$f_{51} = \frac{\partial \ddot{y}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{2} \gamma V \dot{y} \right) = 0 \quad (\text{D.11})$$

$$f_{52} = \frac{\partial \ddot{y}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{1}{2} \gamma V \dot{y} \right) = 0 \quad (\text{D.12})$$

$$f_{53} = \frac{\partial \ddot{y}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{1}{2} \gamma V \dot{y} \right) = -\frac{1}{2} \dot{y} V \frac{\partial \gamma}{\partial z} = \frac{1}{2} \dot{y} V h \gamma \quad (\text{D.13})$$

$$f_{54} = \frac{\partial \ddot{y}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(-\frac{1}{2} \gamma V \dot{y} \right) = -\frac{1}{2} \gamma \dot{y} \frac{\partial V}{\partial \dot{x}} = -\frac{1}{2} \gamma \dot{y} \frac{\dot{x}}{V} \quad (\text{D.14})$$

$$f_{55} = \frac{\partial \ddot{y}}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \left(-\frac{1}{2} \gamma V \dot{y} \right) = -\frac{1}{2} \gamma \left(V \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{y}} + \dot{y} \frac{\partial V}{\partial \dot{y}} \right) \quad (\text{D.15})$$

$$= -\frac{1}{2} \gamma \left(V + \frac{\dot{y}^2}{V} \right) \quad (\text{D.16})$$

$$f_{56} = \frac{\partial \ddot{y}}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial}{\partial \dot{z}} \left(-\frac{1}{2} \gamma V \dot{y} \right) = -\frac{1}{2} \gamma \dot{y} \frac{\dot{z}}{V} \quad (\text{D.17})$$

$$f_{57} = \frac{\partial \ddot{y}}{\partial \gamma} = \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(-\frac{1}{2} \gamma V \dot{y} \right) = -\frac{1}{2} V \dot{y} \quad (\text{D.18})$$

$$f_{61} = \frac{\partial \ddot{z}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{2} \gamma V \dot{z} - g \right) = 0 \quad (\text{D.19})$$

$$f_{62} = \frac{\partial \ddot{z}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{1}{2} \gamma V \dot{z} - g \right) = 0 \quad (\text{D.20})$$

$$f_{63} = \frac{\partial \ddot{z}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{1}{2} \gamma V \dot{z} - g \right) = \frac{1}{2} \dot{z} V h \gamma \quad (\text{D.21})$$

$$f_{64} = \frac{\partial \ddot{z}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(-\frac{1}{2} \gamma V \dot{z} - g \right) = -\frac{1}{2} \gamma \frac{\dot{x} \dot{z}}{V} \quad (\text{D.22})$$

$$f_{65} = \frac{\partial \ddot{z}}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \left(-\frac{1}{2} \gamma V \dot{z} - g \right) = -\frac{1}{2} \gamma \frac{\dot{y} \dot{z}}{V} \quad (\text{D.23})$$

$$f_{66} = \frac{\partial \ddot{z}}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial}{\partial \dot{z}} \left(-\frac{1}{2} \gamma V \dot{z} - g \right) = -\frac{1}{2} \gamma \left(V + \frac{\dot{z}^2}{V} \right) \quad (\text{D.24})$$

$$f_{67} = \frac{\partial \ddot{z}}{\partial \gamma} = \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(-\frac{1}{2} \gamma V \dot{z} - g \right) = -\frac{1}{2} V \dot{z} \quad (\text{D.25})$$

$$f_{71} = \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (-\gamma h \dot{z}) = 0 \quad (\text{D.26})$$

$$f_{72} = \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (-\gamma h \dot{z}) = 0 \quad (\text{D.27})$$

$$f_{73} = \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (-\gamma h \dot{z}) = h^2 \dot{z} \gamma \quad (\text{D.28})$$

$$f_{74} = \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}} (-\gamma h \dot{z}) = 0 \quad (\text{D.29})$$

$$f_{75} = \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial}{\partial \dot{y}} (-\gamma h \dot{z}) = 0 \quad (\text{D.30})$$

$$f_{76} = \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial}{\partial \dot{z}} (-\gamma h \dot{z}) = -\gamma h \quad (\text{D.31})$$

$$f_{77} = \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial \gamma} = \frac{\partial}{\partial \gamma} (-\gamma h \dot{z}) = -h \dot{z} \quad (\text{D.32})$$